Jean-François Hachelouf

4. Convexité - Exercices

Barycentres, parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

E-4.1. *(5')** Montrer que $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leqslant z\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^3$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.2. *(10')*** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ unitaires tels que 0 soit dans l'enveloppe convexe de $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant n - 2$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.3. *(25')**** *Théorèmes de Radon et de Helly.* Soit E un plan vectoriel réel.

(a) *Théorème de Radon.* Montrer que toute partie finie X de E de cardinal supérieur ou égal à 4 possède une partition de la forme $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$, telle que

$$\mathrm{Conv}(Y) \cap \mathrm{Conv}(Z) \neq \emptyset.$$

(b) *Théorème de Helly.* Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de $n \geqslant 3$ convexes de E telle que l'intersection de trois quelconques d'entre eux soit non vide. Montrer que $\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} C_k \neq \emptyset$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

Fonctions convexes

E-4.4. *(5')** Soient $f : I \to \mathbb{R}_+$ convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, $x < y < z$. Donner le signe de $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix}$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.5. *(10')** Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ les angles d'un triangle T non aplati. Montrer que

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \geqslant \frac{2}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.6. *(10')** Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit constante ou strictement monotone sur $]a, +\infty[$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.7. *(10')*** Que peut-on dire de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée sur $\mathbb{R}$?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.8. *(15')*** Soient I un intervalle et f et g deux applications convexes sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est-elle convexe ?

(b) fg est-elle convexe ? Et en ajoutant que f et g sont positives ?

(c) Si f est à valeurs dans un intervalle J et si h est convexe sur J, $h \circ f$ est-elle convexe ?

(d) Si la réponse à l'une des questions précédentes est non, quelle hypothèse ajouter pour que la réponse devienne oui ?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.9. *(10')*** Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, on pose $M = \|f''\|_\infty$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$

$$\left| f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right| \leqslant M \frac{(b - x)(x - a)}{2}.$$

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.10. *(10')*** *Inégalité de Ky Fan.* Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^n$. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 - x_k} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} (1 - x_k)}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-4.11. (*10'*)** Soit $(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}_+^*)^4$ vérifiant $a+b+c+d=1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.12. (*10'*)** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A\subset E$ une partie convexe non vide. Montrer que l'application $f: x\mapsto \mathrm{d}(x,A)$ est convexe sur E.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.13. (*15'*)** Soient $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ et g définie par $g: x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

(a) Montrer que si g est décroissante, alors pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

(b) Montrer la réciproque en supposant de plus f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.14. (*20'*)** *Polaire d'une fonction convexe.* Soit $f\in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha>0$ vérifiant pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\geqslant\alpha$.

(a) Montrer que f' réalise une bijection de classe C^2 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On pose

$$f^*(x)=xf'^{-1}(x)-f(f'^{-1}(x))$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$ (*polaire* de f). Calculer les deux premières dérivées de f^*, et en déduire que s'il existe $\beta>0$ tel que $f''(x)\leqslant\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors $(f^*)^*$ est bien définie et est égale à f.

(c) Calculer la polaire de la fonction ch (on introduira la réciproque Argsh du sinus hyperbolique).

(d) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f^*(x)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(tx-f(t))$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.15. (*20'*)*** Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$

$$0\leqslant\frac{f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\frac{f(n)}{2}-\int_0^n f\leqslant\frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.16. (*20'*)*** Soit f une application définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.

(i) $\ln\circ f$ est convexe sur I.

(ii) Pour tout $\alpha>0$, f^α est convexe sur I.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-4.17. (*20'*)*** Soit f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est convexe sur I si et seulement si pour tout segment $[a,b]\subset I$, $a<b$, et tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\varphi_\lambda: x\mapsto f(x)-\lambda x$$

est majorée et atteint sa borne supérieure en a ou en b.

(b) On suppose de plus f continue sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x\in I$, et pour tout $h>0$ vérifiant $[x-h,x+h]\subset I$, on a

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Énoncé détaillé – Corrigé

4. Convexité - Exercices (énoncés détaillés)

Barycentres, parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

E-4.1. $(5')^*$ Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leqslant z\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^3$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.2. $(10')^{**}$ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ unitaires tels que 0 soit dans l'enveloppe convexe de $(x_1, \dots, x_n)$. On peut donc considérer $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

(a) Montrer que $\max\{\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant n\} \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant n - 2$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.3. $(25')^{***}$ *Théorèmes de Radon et de Helly.* Soit E un plan vectoriel réel.

(a) *Théorème de Radon.* Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ avec $p \geqslant 4$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. En déduire que toute partie finie X de E de cardinal supérieur ou égal à 4 possède une partition de la forme $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$, telle que

$$\mathrm{Conv}(Y) \cap \mathrm{Conv}(Z) \neq \emptyset.$$

(b) *Théorème de Helly.* Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de $n \geqslant 3$ convexes de E telle que l'intersection de trois quelconques d'entre eux soit non vide. En raisonnant par récurrence avec le théorème de Radon, montrer que $\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} C_k \neq \emptyset$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

Fonctions convexes

E-4.4. $(5')^*$ Soient $f : I \to \mathbb{R}_+$ convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, $x < y < z$. À l'aide d'opérations sur les lignes, montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.5. $(10')^*$ Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ les angles d'un triangle T non aplati. Montrer que $\frac{1}{\sin}$ est convexe sur $]0, \pi[$, et en déduire que

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \geqslant \frac{2}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.6. $(10')^*$ Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

(a) On suppose qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$. Montrer que f est croissante sur $]y, +\infty[$.

(b) Montrer, en toute généralité, qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit constante ou strictement monotone sur $]a, +\infty[$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.7. $(10')^{**}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que f est constante.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.8. $(15')^{**}$ Soient I un intervalle et f et g deux applications convexes sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\lambda f + \mu g$ est convexe si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$, mais pas nécessairement s'ils ne sont pas positifs.

(b) Montrer que fg n'est pas nécessairement convexe, même si elles sont en outre positives. Montrer que fg est convexe si elles sont à la fois croissantes et positives.

(c) Si f est à valeurs dans un intervalle J et si h est convexe sur J, montrer que $h \circ f$ est convexe si h est en outre croissante, et ne l'est pas nécessairement sinon.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.9. *(10')*** Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$, on pose $M = \|f''\|_\infty$.

(a) Montrer que $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - M\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}$ est convexe.

(b) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$

$$\left|f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right| \leqslant M\frac{(b-x)(x-a)}{2}.$$

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.10. *(10')*** *Inégalité de Ky Fan.* Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \left]0,\frac{1}{2}\right]^n$.

(a) Montrer que $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ est strictement concave sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

(b) Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1-x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.11. *(10')*** Soit $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ vérifiant $a+b+c+d=1$.

(a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.12. *(10')*** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie convexe non vide.

(a) Justifier que pour tout $(a,b) \in A^2$ et tout $t \in [0,1]$

$$\mathrm{d}(tx + (1-t)y, A) \leqslant t\|x-a\| + (1-t)\|y-b\|.$$

(b) Montrer que l'application $f : x \mapsto \mathrm{d}(x,A)$ est convexe sur E.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.13. *(15')*** Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et g définie par $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

(a) Montrer que si g est décroissante, alors pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

On pourra majorer $g(x+y)$ de deux façons différentes.

(b) On suppose que $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En écrivant y comme barycentre de x et $x+y$ pour $x < y$, montrer que g est décroissante.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.14. *(20')*** *Polaire d'une fonction convexe.* Soit $f \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant \alpha$.

(a) Montrer, avec le théorème des accroissements finis, que $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, puis que f' réalise une bijection de classe C^2 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On pose

$$f^*(x) = xf'^{-1}(x) - f(f'^{-1}(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (*polaire* de f). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f^*)'(x) = f'^{-1}(x) \quad ; \quad (f^*)''(x) = \frac{1}{f''(f'^{-1}(x))}.$$

Justifer que s'il existe $\beta > 0$ tel que $f''(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $(f^*)^*$ est bien définie et est égale à f.

(c) Calculer la polaire de la fonction ch (on introduira la réciproque Argsh du sinus hyperbolique).

(d) En étudiant $F_x : t \mapsto tx - f(t)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que $f^*(x) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(tx - f(t))$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-4.15. (*20'*)*** Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$

$$\frac{f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\frac{f(n)}{2}-\int_0^n f\geqslant 0.$$

(b) Montrer, toujours pour $n\geqslant 2$, que

$$\int_0^n f=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k))-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t.$$

En déduire que

$$\frac{f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\frac{f(n)}{2}-\int_0^n f\leqslant\frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-4.16. (*20'*)*** Soit f une application définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On souhaite démontrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.

(i) $\ln\circ f$ est convexe sur I.

(ii) Pour tout $\alpha>0$, f^α est convexe sur I.

(a) Montrer le sens (i)$\Rightarrow$(ii).

(b) On suppose (ii). En écrivant la convexité de f^α et en faisant tendre $\alpha>0$ vers 0 de façon judicieuse, montrer (i).

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-4.17. (*20'*)*** Soit f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est convexe sur I. Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\varphi_\lambda : x\mapsto f(x)-\lambda x$$

est convexe sur I, puis qu'elle est majorée et atteint sa borne supérieure en a ou en b sur tout segment $[a,b]\subset I$.

(b) On suppose réciproquement que φ_λ est majorée sur I et atteint sa borne supérieure en a ou en b sur tout segment $[a,b]\subset I$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. En choisissant avec soin λ pour $(a,b)\in I^2$ fixés, montrer que f est convexe sur I.

(c) On suppose de plus f continue sur I. Montrer que si f est convexe, alors pour tout $x\in I$, pour tout $h>0$ vérifiant $[x-h,x+h]\subset I$ et tout $t\in[0,h]$

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(x-t)+\frac{1}{2}f(x+t).$$

En déduire que

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer la réciproque du résultat précédent en raisonnant par contraposée avec (b)

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

4. Convexité - Exercices (corrigés)

Barycentres, parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

E-4.1. C est l'épigraphe de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$. f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ car $\varphi: t\mapsto t^2$ l'est, si bien que pour $a=(x,y)$ et $b=(x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}f(\lambda a+(1-\lambda)b) &= \varphi(\lambda x+(1-\lambda x'))+\varphi(\lambda y+(1-\lambda y'))\leqslant \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(x')+\lambda\varphi(y)+(1-\lambda)\varphi(y')\\ &=\lambda(\varphi(x)+\varphi(y))+(1-\lambda)(\varphi(x')+\varphi(y'))=\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\end{aligned}$$

d'où la convexité de f puis celle de C.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.2. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k=0$ et $\sum_{k=1}^n\lambda_k=1$. Quitte à réordonner, on les suppose rangés dans l'ordre croissant $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$, de sorte qu'en particulier, $\lambda_n>0$. On a par la seconde inégalité triangulaire

$$0=\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k\right\|\geqslant\lambda_n\|x_n\|-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\|x_k\|=\lambda_n-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k=\lambda_n-(1-\lambda_n)=2\lambda_n-1$$

de sorte que $\lambda_n\leqslant\dfrac{1}{2}$. On peut alors écrire

$$x_n=-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k$$

et donc

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)\|x_k\|=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)=n-1-\frac{1-\lambda_n}{\lambda_n}=n-\frac{1}{\lambda_n}\\ &\leqslant n-2.\end{aligned}$$

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.3. (a) Notons $p=\mathrm{Card}(X)$, $(x_1,\dots,x_p)$ les éléments deux à deux distincts de X. $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\mapsto\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i x_i,\sum_{i=1}^p\lambda_i\right)$ n'est pas injective de $\mathbb{R}^p$ dans $E\times\mathbb{R}$ car elle est linéaire et $p\geqslant 4>\dim(E\times\mathbb{R})=3$, de sorte qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p\lambda_i=0$ et $\sum_{i=1}^p\lambda_i x_i=0$ (voir l'exercice de TD sur le théorème de Carathéodory qui exploite la même idée). Quitte à les réordonner, on peut supposer que $k\in[\![1,p]\!]$ vérifie $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant 0$ et $0<\lambda_{k+1}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_p$. On a alors

$$\sum_{i=1}^k(-\lambda_i)=\sum_{i=k+1}^p\lambda_i$$

et l'on peut noter s la valeur commune de ces deux quantités. On a $s>0$ car $s=0$ entraînerait que tous les λ_i sont nuls, en contradiction avec leur construction. On pose alors $\mu_i=-\dfrac{\lambda_i}{s}$ pour tout $i\in[\![1,k]\!]$ et $\nu_i=\dfrac{\lambda_i}{s}$ pour tout $i\in[\![k+1,p]\!]$, qui sont des coefficients positifs et vérifiant $\sum_{i=1}^k\mu_i=\sum_{i=k+1}^p\nu_i=1$ par construction. Il vient alors

$$\sum_{i=1}^k(-\lambda_i)x_i=\sum_{i=k+1}^p\lambda_i x_i\iff\sum_{i=1}^k\mu_i x_i=\sum_{i=k+1}^p\nu_i x_i.$$

Le point z, valeur commune de ces deux sommes, est donc à la fois dans l'enveloppe convexe de $Y=\{x_1,\dots,x_k\}$ et de $Z=\{x_{k+1},\dots,x_p\}$, qui répondent aux exigences de l'énoncé.

(b) On raisonne par récurrence sur n, le cas $n=3$ étant évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1\geqslant 3$ et considérons $(C_1,\dots,C_n)$ des convexes de E d'intersections trois à trois non vides. Par hypothèse de récurrence, l'intersection de $n-1$ quelconques d'entre eux n'est pas vide, et il existe donc $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ tel que $x_i\in\bigcap_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}C_j$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Si deux d'entre eux sont égaux, il s'agit d'un point de $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}C_i$. Sinon, comme $n\geqslant 4$, on peut appliquer le théorème de Radon à $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, et (quitte à réordonner) il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $Y=\{x_1,\dots,x_k\}$ et $Z=\{x_{k+1},\dots,x_n\}$ aient un point commun z dans leurs enveloppes convexes. Comme $Y\subset U_1=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}C_i$ qui est convexe, on a $z\in U_1$, et de même $z\in U_2=\bigcap_{k+1\leqslant i\leqslant p}C_i$, puis finalement $z\in\bigcap_{1\leqslant i\leqslant p}C_i$ comme voulu. Ceci achève la récurrence.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Fonctions convexes

E-4.4. En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis en développant par rapport à la première colonne, et enfin en factorisant par $y - x > 0$ et $z - x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & f(y)-f(x) \\ z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix} \\ &= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ 1 & \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \end{vmatrix} \\ &= (y-x)(z-x)\left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-4.5. Comme T n'est pas aplati, on peut chosir $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0, \pi[^3$ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. $f = \dfrac{1}{\sin}$ étant convexe sur $]0, \pi[$ car deux fois dérivable et de dérivée seconde $\dfrac{\sin^2 + 2\cos^2}{\sin^3} > 0$ (calcul facile), on a

$$\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) \geqslant f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) \geqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

comme voulu.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-4.6. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$. Pour tous $(z, t) \in]y, +\infty[^2$ tel que $z < t$, on a par applications successives de l'inégalité des pentes

$$\frac{f(t)-f(z)}{t-z} \geqslant \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$$

ce qui montre que $f(t) \geqslant f(z)$ et donc que f est croissante sur $]y, +\infty[$. Si f n'est pas constante, il existe alors $a \in]y, +\infty[$ tel que $f(a) > f(y)$. En reprenant alors le même raisonnement, on montre que f est strictement croissante sur $]a, +\infty[$.

Dans le cas contraire, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

ce qui signifie cette fois que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-4.7. Supposons que f ne soit pas constante, et considérons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) > f(y)$. Supposons par exemple que $x > y$. Alors d'après l'inégalité des pentes, pour tout $z > x$

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \iff f(z) > \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(z-y) + f(y)$$

qui diverge vers $+\infty$ quand z tend vers $+\infty$, ce qui est absurde puisque f est bornée. Le même raisonnement en $-\infty$ permet de conclure si $x < y$. Finalement, f est nécessairement constante.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-4.8. (a) La réponse est non, prendre f strictement convexe, $\lambda = -1$ et $\mu = 0$. Si on ajoute que λ et μ sont positifs ou nuls, pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0, 1]$

$$(\lambda f+\mu g)(tx+(1-t)y) = \lambda f(tx+(1-t)y)+\mu g(tx+(1-t)y) \leqslant \lambda t f(x)+\lambda(1-t)f(y)+\mu t g(x)+\mu(1-t)g(y) = t(\lambda f+\mu g)(x)+(1-t)(\lambda f+\mu g)(y)$$

si bien que $\lambda f + \mu g$ est convexe.

(b) Non : $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais $\varphi = fg : x \mapsto x^2 e^x$ ne l'est pas : elle est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = (x^2 + 2x)e^x \quad ; \quad \varphi''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

si bien que φ'' n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ ($\varphi''(-1) < 0$, par exemple). En revanche, si f et g sont convexes croissantes et positives, alors pour tout $(x, y) \in I^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$

$$(fg)(tx + (1-t)y) \leqslant (tf(x) + (1-t)f(y))(tg(x) + (1-t)g(y)) = t^2(fg)(x) + (1-t)^2(fg)(y) + t(1-t)(f(x)g(y) + f(y)g(x)).$$

Or, en supposant par exemple $x \leqslant y$

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)-(f(x)g(y)+f(y)g(x)) = (f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0$$

si bien que

$$(fg)(tx+(1-t)y) \leqslant t^2(fg)(x)+(1-t)^2(fg)(y)+t(1-t)(f(x)g(x)+f(y)g(y)) = t(fg)(x)+(1-t)(fg)(y)$$

et fg est convexe.

(c) Non plus... Pour $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, $h \circ f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ n'est pas convexe (dériver deux fois). Si on suppose de plus h croissante, alors pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0,1]$

$$(h \circ f)(tx+(1-t)y) \leqslant h(\lambda t f(x)+\lambda(1-t)f(y)) \leqslant t(h \circ f)(x)+(1-t)(h \circ f)(y)$$

et $h \circ f$ est convexe.

(d) On a répondu dans chaque question.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.9. Soit $g : x \mapsto f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-M\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}$. g est de classe C^2 et $g'' : x \mapsto f''(x)+M \geqslant 0$, si bien que g est convexe. Le graphe de g est donc situé sous sa corde $[a,b]$, ce qui donne pour tout $x \in [a,b]$

$$g(x) \leqslant g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a) = 0 \iff f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leqslant M\frac{(b-x)(x-a)}{2}.$$

On montre de même que $h : x \mapsto f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+M\dfrac{(b-x)(x-a)}{2}$ est concave puis positive, ce qui donne le résultat voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.10. L'inégalité est triviale si l'un des x_k est nul. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \ln(x)-\ln(1-x)$ est strictement concave sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ car deux fois dérivable et de dérivée seconde $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$. Par l'inégalité de Jensen

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \iff \ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}{1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{1-x_k}\right)$$

d'où le résultat par croissance de l'exponentielle. Le cas d'égalité est obtenu quand tous les x_k sont égaux, par stricte concavité.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.11. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} &= af\left(\frac{b}{a}\right)+bf\left(\frac{c}{b}\right)+cf\left(\frac{d}{c}\right)+df\left(\frac{a}{d}\right)\\ &\geqslant f(b+c+d+a) = f(1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par stricte convexité, l'égalité a lieu si et seulement si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{a}{d}$. En notant $\lambda > 0$ cette valeur commune, on aboutit à

$$b = \lambda a = \lambda^2 d = \lambda^3 c = \lambda^4 b$$

donc $\lambda = 1$, et $a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.12. Soient $(x, y) \in E^2$, $t \in [0,1]$ et $(a, b) \in A^2$. Comme A est convexe, $ta+(1-t)b \in A$, de sorte que

$$\mathrm{d}(tx+(1-t)y, A) \leqslant \|tx+(1-t)y-(ta+(1-t)b)\| \leqslant t\|x-a\|+(1-t)\|y-b\|.$$

On peut passer successivement dans le terme de droite à la borne inférieure pour $a \in A$, puis pour $b \in A$, ce qui donne bien

$$\mathrm{d}(tx+(1-t)y, A) \leqslant t\mathrm{d}(x, A)+(1-t)\mathrm{d}(x, A)$$

et donc la convexité de $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.13. (a) Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(x+y)}{x+y} \iff f(x) \geqslant x\frac{f(x+y)}{x+y}.$$

On a de même $f(y) \geqslant y\dfrac{f(x+y)}{x+y}$ d'où le résultat en sommant.

(b) Si $x < y$, y est barycentre de x et $x+y$

$$y = \frac{x}{y}x + \left(1 - \frac{x}{y}\right)(x+y)$$

d'où

$$f\left(\frac{x}{y}x + \left(1-\frac{x}{y}\right)(x+y)\right) \leqslant \frac{x}{y}f(x) + \left(1-\frac{x}{y}\right)f(x+y) \leqslant \frac{x}{y}f(x) + \left(1-\frac{x}{y}\right)f(x) + \left(1-\frac{x}{y}\right)f(y)$$

si bien que

$$f(y) \leqslant f(x) + \left(1-\frac{x}{y}\right)f(y) \iff xf(y) \leqslant yf(x) \iff g(y) \leqslant g(x)$$

ce qu'on voulait.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.14. (a) f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc f' est strictement croissante. Comme elle est en outre dérivable, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image. Cependant, comme f' est en particulier dérivable sur $[0,x]$ pour tout $x>0$, il existe d'après le théorème des accroissement finis un $c \in]0,x[$ tel que $f'(x) - f'(0) = xf''(c)$ d'où

$$f'(x) \geqslant \alpha x + f'(0)$$

ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. On a de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ et f' réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Enfin, f' est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme dérivée d'une application de classe C^2 ce qui conclut.

(b) f^* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme différence d'un produit et d'une composée d'applications de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (la composition ne pose pas de problème puisque f est définie sur $\mathbb{R}$ et f'^{-1} est à valeurs réelles). On a par le théorème de dérivation des fonctions composées que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f^*)'(x) = f'^{-1}(x) + \frac{x}{f''(f'^{-1}(x))} - \frac{1}{f''(f'^{-1}(x))}f'(f'^{-1}(x)) = f'^{-1}(x)$$

et donc

$$(f^*)''(x) = \frac{1}{f''(f'^{-1}(x))}.$$

S'il existe $\beta > 0$ tel que $f''(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $(f^*)''(x) \geqslant \dfrac{1}{\beta}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'on peut appliquer tout ce qui précède à f^*. $(f^*)^*$ est donc bien définie. En remarquant que $(f^*)' = f'^{-1}$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(f^*)^*(x) &= x(f^*)'^{-1}(x) - f^*((f^*)'^{-1}(x)) \\
&= xf'(x) - f^*(f'(x)) \\
&= xf'(x) - f'(x)f'^{-1}(f'(x)) + f(f'^{-1}(f'(x))) \\
&= xf'(x) - f'(x)x + f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

d'où $(f^*)^* = f$, ce qu'on voulait.

(c) on sait que sh réalise une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$. En posant $X = e^x$, il vient

$$\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

On en déduit que $X = e^x = y + \sqrt{1+y^2}$, l'autre racine $y - \sqrt{1+y^2}$ de ce trinôme en X étant négative puisque $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geqslant y$. Finalement, pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Notons que $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch} \geqslant 1$, ce qui valide l'existence de ch^*. Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}^*(x) = x\operatorname{Argsh}(x) - \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)).$$

Comme $\operatorname{ch} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2}$, on obtient finalement

$$\operatorname{ch}^*(x) = x\operatorname{Argsh}(x) - \sqrt{1+x^2}.$$

(d) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $F_x : t \mapsto tx - f(t)$. F_x est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F_x'(t) = x - f'(t).$$

f' est décroissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, si bien que F_x' est strictement positive sur $]-\infty, f'^{-1}(x)[$ et strictement négative sur $]f'^{-1}(x), +\infty[$. On en déduit que F_x atteint son maximum (strict) en $t = f'^{-1}(x)$ et donc que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} tx - f(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} F_x(t) = F_x(f'^{-1}(x)) = f'^{-1}(x)x - f(f'^{-1}(x)) = f^*(x)$$

ce qu'on voulait.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.15. On a par la relation de Chasles

$$\int_0^n f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f.$$

f étant convexe, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, son graphe sur $[k, k+1]$ est situé sous la corde reliant ses deux extrémités (graphiquement, l'aire sous le graphe de f est inférieure ou égale à celle d'un trapèze). Formellement, on a pour tout $t \in [k, k+1]$

$$f(t) \leqslant (f(k+1) - f(k))(t-k) + f(k)$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \left[(f(k+1)-f(k))\frac{(t-k)^2}{2} + f(k)(t-k)\right]_k^{k+1} = \frac{f(k+1)+f(k)}{2}.$$

Il vient en sommane de 0 à $n-1$

$$\int_0^n f \leqslant \frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2}$$

ce qui donne la partie gauche de notre double inégalité.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on effectue ensuite dans $\displaystyle\int_k^{k+1} f$ une intégration par parties. Il vient

$$\int_k^{k+1} f = \left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) - \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) - \int_k^{k+1} f = \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t. \qquad (\spadesuit)$$

Or

$$\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t.$$

Comme f' est croissante et $t-k-\dfrac{1}{2} \leqslant 0$ pour $t \in \left[k, k+\dfrac{1}{2}\right]$, on a

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(k)\mathrm{d}t = f'(k)\left[\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2\right]_k^{k+\frac{1}{2}} = -\frac{f'(k)}{8}.$$

On obtient de même

$$\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(k+1)}{8}$$

puis par sommation de $(\spadesuit)$ pour k allant de 0 à $n-1$

$$\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} = \frac{f'(n)-f'(0)}{8}$$

comme voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.16. Supposons (i). $\alpha(\ln\circ f)$ est alors convexe pour tout $\alpha > 0$: pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0,1]$

$$\alpha\ln f(tx+(1-t)y) \leqslant t\alpha\ln f(x) + (1-t)\alpha\ln f(y)$$

et par croissance puis convexité de l'exponentielle

$$f(tx+(1-t)y)^\alpha \leqslant \exp\big(t\alpha\ln f(x) + (1-t)\alpha\ln f(y)\big) \leqslant t f(x)^\alpha + (1-t)f(y)^\alpha$$

donc f^α est convexe.

Supposons (ii) : on a pour tout $\alpha > 0$, tout $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0,1]$ en écrivant la convexité de f^α, en passant au logarithme et en divisant par α
$$\ln(f(tx+(1-t)y)) \leqslant \frac{\ln(tf(x)^\alpha + (1-t)f(y)^\alpha)}{\alpha} = g(\alpha).$$
On peut faire tendre α vers 0 dans $g(\alpha)$ en reconnaissant dans la limite la dérivée en 0 de $\varphi : \alpha \mapsto \ln(tf(x)^\alpha + (1-t)f(y)^\alpha)$. Or pour tout $\alpha \geqslant 0$
$$\varphi'(\alpha) = \frac{t\ln(f(x))f(x)^\alpha + (1-t)\ln(f(y))f(y)^\alpha}{tf(x)^\alpha + (1-t)f(y)^\alpha}$$
donc $\varphi'(0) = t\ln(f(x)) + (1-t)\ln(f(y))$ et
$$\ln(f(tx+(1-t)y)) \leqslant t\ln(f(x)) + (1-t)\ln(f(y))$$
comme voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-4.17. (a) Supposons f convexe : on vérifie immédiatement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, φ_λ est également convexe. On a alors pour tout $[a,b] \subset I$ et pour tout $x \in [a,b]$ l'existence de $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$ et il vient en notant $M = \max(\varphi_\lambda(a), \varphi_\lambda(b))$
$$\varphi_\lambda(x) \leqslant t\varphi_\lambda(a) + (1-t)\varphi_\lambda(b) \leqslant tM + (1-t)M = M$$
si bien que φ_λ est majorée sur $[a,b]$ et $\sup_{[a,b]} \varphi_\lambda = \max_{[a,b]} \varphi_\lambda = M$.

Supposons réciproquement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, φ_λ soit majorée sur tout $[a,b] \subset I$ de borne supérieure atteinte en a ou b. Pour a et b fixés tels que $a < b$, on prend alors $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, valeur qui assure que $\varphi_\lambda(a) = \varphi_\lambda(b)$. Alors pour tout $t \in [0,1]$
$$f(ta+(1-t)b) = \varphi_\lambda(ta+(1-t)b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b) \leqslant \varphi_\lambda(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b)$$
et compte tenu du fait que $\varphi_\lambda(a) = \varphi_\lambda(b)$
$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &\leqslant t\varphi_\lambda(a) + (1-t)\varphi_\lambda(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b) \\ &= tf(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}ta + (1-t)f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-t) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b) \end{aligned}$$
ce qui montre bien que f est convexe sur I puisque a et b sont arbitraires.

(b) Si f est convexe, alors pour tout $x \in I$, $h > 0$ tel et $t \in [0,h]$
$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}(x-t) + \frac{1}{2}(x+t)\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}f(x+t)$$
ce qui donne par intégration sur $[0,h]$
$$2hf(x) \leqslant \int_0^h f(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^h f(x+t)\mathrm{d}t = \int_{x-h}^{x+h} f(u)\mathrm{d}u$$
en posant $u = x-t$ dans la première intégrale et $u = x+t$ dans la seconde, d'où le résultat en divisant par $2h > 0$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée en supposant que f n'est pas convexe : d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$, $a < b$, tels que φ_λ (qui est nécessairement majorée sur $[a,b]$ car continue sur ce segment) atteigne son maximum (toujours du fait de la continuité sur un segment) en $x \in]a,b[$, avec $\varphi_\lambda(a) < \varphi_\lambda(x)$ et $\varphi_\lambda(b) < \varphi_\lambda(x)$. On prend alors $h = \min(x-a, b-x)$ de sorte que, soit $x-h = a$, soit $x+h = b$. On suppose par exemple qu'on se trouve dans le premier cas. Il vient
$$\varphi_\lambda(t) \leqslant \varphi_\lambda(x)$$
pour tout $t \in [x-h, x+h]$. Par intégration sur $[x-h, x+h]$ de $t \mapsto \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(t)$ qui est positive, continue et non identiquement nulle (puisque $\varphi_\lambda(x-h) = \varphi_\lambda(a) < \varphi_\lambda(x)$), il vient par stricte positivité de l'intégrale
$$\int_{x-h}^{x+h} \varphi_\lambda(x)\mathrm{d}t > \int_{x-h}^{x+h} \varphi_\lambda(t)\mathrm{d}t$$
ce qui donne
$$2h(f(x) - \lambda x) > \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - 2h\lambda x \iff f(x) > \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$
et achève la preuve par contraposée.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**