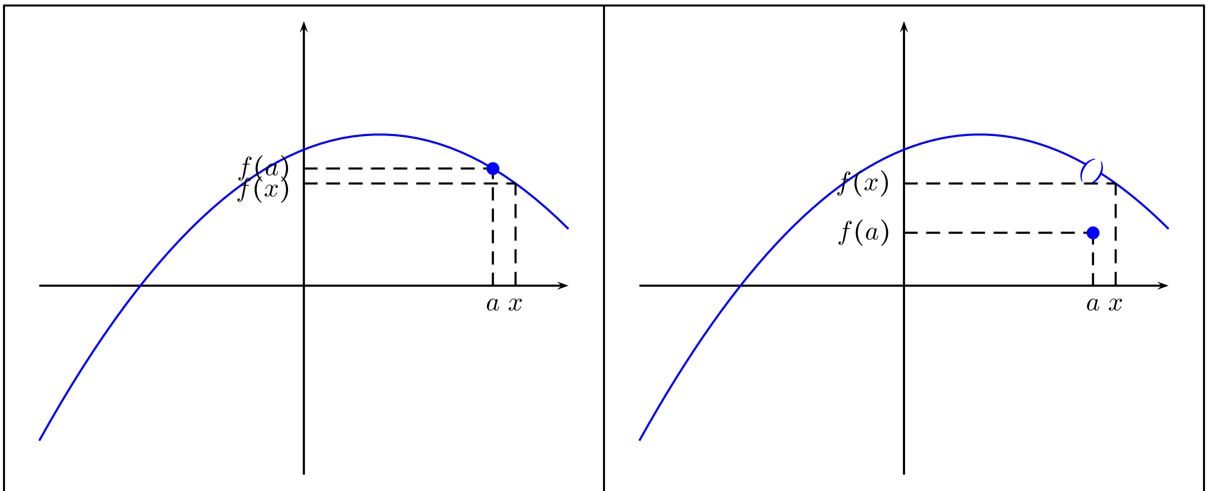
# Chapitre 6. Continuité

## I. Continuité en un point. Continuité sur un intervalle

### 1) Définition

**Définition 1.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
**1)** Soit $a$ un réel élément de $I$. $f$ est **continue en** $a$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
**2)** $f$ est **continue sur** $I$ si et seulement si $f$ est continue en tout réel $a$ élément de $I$.

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe se trace « sans lever le crayon ».




| | |
|---|---|
| Quand $x$ tend vers $a$, $f(x)$ tend vers $f(a)$.<br>$f$ est continue en $a$. | Quand $x$ tend vers $a$, $f(x)$ ne tend pas vers $f(a)$.<br>$f$ n'est pas continue en $a$. |

### 2) Continuité des fonctions de référence

Les fonctions de référence connues à ce jour sont toutes continues sur leur domaine de définition. Plus précisément

**Théorème 1.** Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto x^n$, $n$ entier naturel non nul, sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n$ entier naturel non nul, sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

### 3) Un exemple de fonction discontinue : la fonction « partie entière »

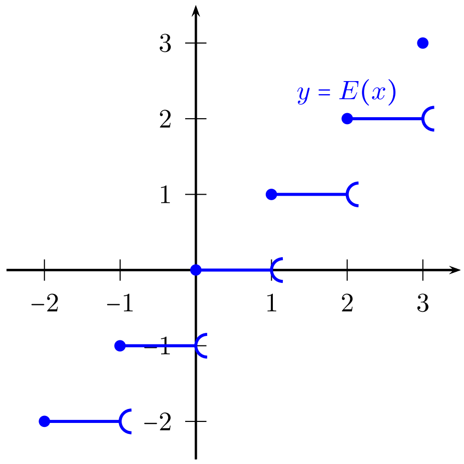
Soit $x$ un réel. La partie entière du réel $x$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$. La partie entière du réel $x$ est notée $E(x)$.

Par exemple, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $3,7$ est $3$ et donc $E(3,7) = 3$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $-2,6$ est $-3$ et donc $E(-2,6) = -3$ et le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $4$ est le nombre $4$ lui-même et donc $E(4) = 4$.

On va maintenant construire le graphe de la fonction $E$.

- Pour tout réel $x$ de $[0, 1[$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$ est $0$ et donc $E(x) = 0$.
- Pour tout réel $x$ de $[1, 2[$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$ est $1$ et donc $E(x) = 1$.
- Pour tout réel $x$ de $[2, 3[$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$ est $2$ et donc $E(x) = 2$ ...
- Pour tout réel $x$ de $[-1, 0[$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$ est $-1$ et donc $E(x) = -1$ ...

Le graphe de la fonction partie entière est donc




Ainsi, pour tout réel $x$ de $[0,1[$, $E(x) = 0$ et donc, quand $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures, $E(x)$ tend vers 0. D'autre part, $E(1) = 1$. Donc, $E(1)$ n'est pas la limite de $E(x)$ quand $x$ tend vers 1. La fonction partie entière n'est pas continue en 1. Pour tracer son graphe, nous avons été obligé de « lever le crayon » en franchissant le point d'abscisse 1.

## 4) Fonctions continues et opérations

Les différents théorèmes sur les limites nous donnent immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 2.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$. Soit $a$ un réel de $I$.

**1) a)** Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $f + g$ est continue en $a$.
**b)** Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $f + g$ est continue sur $I$.

**2) a)** Si $k$ est un réel et $f$ est continue en $a$, alors $kf$ est continue en $a$.
**b)** Si $k$ est un réel et $f$ est continue sur $I$, alors $kf$ est continue sur $I$.

**3) a)** Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $f \times g$ est continue en $a$.
**b)** Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $f \times g$ est continue sur $I$.

**4) a)** Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $a$.
**b)** Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ et si $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I$.

Ainsi, une somme ou un produit de fonctions continues est une fonction continue et un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est une fonction continue. En particulier :

**Théorème 3.** **1)** Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

**2)** Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

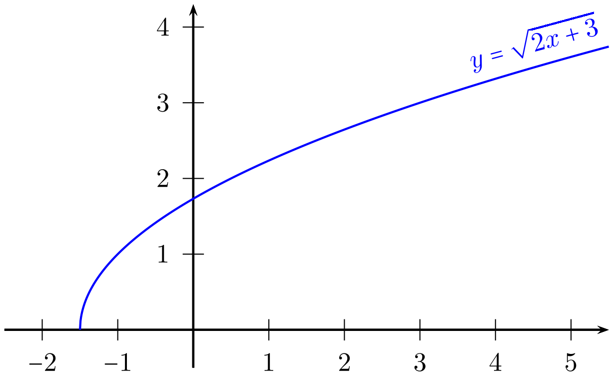
Une composée de fonctions continues est également continue :

**Théorème 4.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $f$ une fonction définie sur $I$ telle que pour tout $x$ de $I$, $f(x)$ appartienne à $J$ et soit $g$ une fonction définie sur $J$.
Si $f$ est continue sur $I$ et $g$ est continue sur $J$, alors $g \circ f$ est continue sur $I$.

**Exemple.** Soit $f$ la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$. Pour $x \in I = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$, posons $g(x) = 2x + 3$ et pour $y \in J = [0, +\infty[$, posons $h(y) = \sqrt{y}$. Pour tout réel de $I$, on a $g(x) \geqslant 0$ ou encore $g(x) \in J$ et de plus, pour tout réel $x$ de $I$, on a $f(x) = h(g(x))$.

La fonction $g$ est continue sur $I$ en tant que fonction polynôme et pour tout réel $x$ de $I$, $g(x)$ appartient à $J$ puis la fonction $h$ est continue sur $J$. On en déduit que la fonction $f = h \circ g$ est continue sur $I$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est continue sur $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. La calculatrice donne le graphe suivant :




## II. Le théorème des valeurs intermédiaires

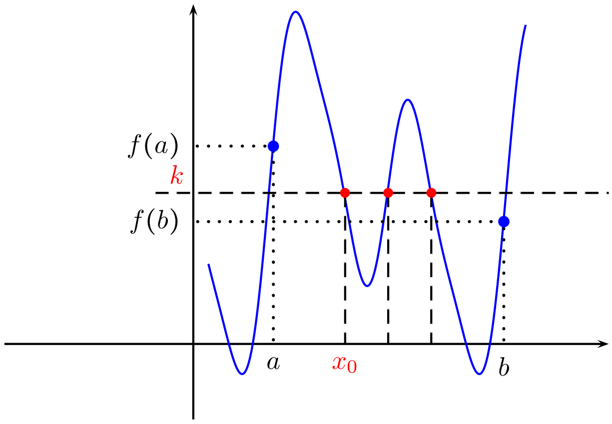
### 1) Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

On admettra le théorème suivant :

**Théorème 5 (théorème des valeurs intermédiaires).**

Soit $f$ une fonction **continue** sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soient $a$ et $b$ deux réels de $I$ tels que $a < b$.
Pour tout réel $k$ compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $x_0$ de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = k$.

Il revient au même de dire que si $f$ est continue sur $[a, b]$ et si $k$ est un réel compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a, b]$. On note qu'il est possible que cette équation ait plusieurs solutions ou encore le réel $x_0$ du théorème 5 n'est pas uniquement défini. On note aussi que $f(a)$ et $f(b)$ sont dans un ordre quelconque. On peut avoir $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$ ou même $f(a) = f(b)$.




**Théorème 6 (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur $[a, b]$.
Pour tout réel $k$ compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe exactement un réel $x_0$ de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = k$ ou encore l'équation $f(x) = k$ admet exactement une solution dans $[a, b]$.

**Démonstration.** Soit $k$ un réel compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$.

Puisque $f$ est continue sur $[a, b]$, le théorème 5 nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel $x_0$ tel que $f(x_0) = k$.
Mais $f$ est aussi strictement monotone sur $[a, b]$. En particulier, deux réels de $[a, b]$, distincts l'un de l'autre, ont des images différentes par $f$ et donc si $x$ est un réel de $[a, b]$ différent de $x_0$, alors $f(x) \neq f(x_0)$ ou encore $f(x) \neq k$.

Ceci montre l'unicité du réel $x_0$.

---

### 2) Exemple d'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires ou de son corollaire

On s'interesse à l'équation

$$x^3 + x = 1 \quad (E).$$

Pour tout réel $x$, posons $f(x) = x^3 + x$. L'équation $(E)$ s'écrit alors : $f(x) = 1$.

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ (on peut aussi écrire : pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$).

Si $x < 0$, alors on a $f(x) < f(0)$ puisque $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ou encore on a $f(x) < 0$. En particulier, si $x < 0$, on a $f(x) \neq 1$ et donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]-\infty, 0[$.
Si $x > 1$, alors $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 2$. En particulier, si $x > 2$, on a $f(x) \neq 1$ et donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]2, +\infty[$.

D'autre part, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ et donc, d'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $k$ compris au sens large entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0,1]$. Comme $0 \leqslant 1 \leqslant 2$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule dans $[0,1]$.

En résumé,

L'équation $(E)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
De plus, cette solution appartient à $[0,1]$.

On note $\alpha$ cette solution. Il n'est malheureusement pas question d'obtenir la valeur exacte de $\alpha$ (tout au moins en terminale) ou encore, en terminale, on ne peut pas résoudre l'équation $x^3 + x = 1$ « de manière exacte ».

Néanmoins, on ne s'arrête pas là. Si on ne peut pas déterminer la valeur exacte de $\alpha$, on va tout de même déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à une précision donnée. Déterminons par exemple une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près par défaut c'est-à-dire un réel $a$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + 10^{-3}$. On dispose de nombreuses méthodes pour y parvenir. On exposera ici deux méthodes : la **méthode par balayage** et la **méthode par dichotomie**.

Quelque soit la méthode, il y a une idée générale à la base : puisque $f$ est strictement croissante sur $[a,b] = [0,1]$, alors si $c$ est un réel de $[a,b]$ tel que $f(c) < 1$ ou encore $f(c) < f(\alpha)$ et si $d$ est un réel de $[a,b]$ tel que $f(d) > 1$ ou encore $f(d) > f(\alpha)$, on a

$$c < \alpha < d.$$

On peut visualiser cette idée dans un tableau de variation.

| $x$ | $a$ | $c$ | $\alpha$ | $d$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $f(a) < 1$ | $f(c) < 1$ | $1$ | $f(d) > 1$ | $f(b) > 1$ |

**Méthode par balayage.** La première idée qui vient à l'esprit consiste à faire « balayer » l'intervalle $[0,1]$ par $x$ en partant de $0$ et en avançant jusqu'à $1$ avec des petits pas de $0,001$. Pour chacune des valeurs de $x$ considérées, on calcule l'image de $x$ par $f$ et on reporte ces valeurs dans un tableau. Quand $f(x)$ franchit le nombre $1$, on a alors un encadrement de $\alpha$ entre deux nombres distants l'un de l'autre de $0,001$.

Cette méthode a un défaut évident : le nombre de calculs effectués. Pour obtenir trois décimales du nombre $\alpha$, on peut calculer jusqu'à 999 images par $f$ (et même 1001 si on recalcule $f(a)$ et $f(b)$).

On améliore l'idée précédente. Chaque nouvelle décimale de $\alpha$ nécessitera 10 calculs au plus.

On divise d'abord l'intervalle $[0,1]$ en dix parties de longueur $10^{-1} = 0,1$. Plus précisément, on fait afficher par la calculatrice les images par $f$ des réels $0$, $0,1$ $0,2$ $\dots$ $0,9$ et $1$ dans un tableau de valeurs. On obtient

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $0,1$ | $0,101$ |
| $0,2$ | $0,208$ |
| $0,3$ | $0,327$ |
| $0,4$ | $0,464$ |
| $0,5$ | $0,625$ |
| $0,6$ | $0,816$ |
| $0,7$ | $1,043$ |
| $0,8$ | $1,312$ |
| $0,9$ | $1,629$ |
| $1$ | $2$ |

Puisque $f(0,6) < 1$ et $f(0,7) > 1$, on obtient déjà $0,6 < \alpha < 0,7$ ou encore la première décimale de $\alpha$ est 6.

On recommence en balayant cette fois-ci l'intervalle $[0,6; 0,7]$ avec un pas de $0,01$. On obtient

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $0,6$ | $0,816$ |
| $0,61$ | $0,836981$ |
| $0,62$ | $0,858328$ |
| $0,63$ | $0,88047$ |
| $0,64$ | $0,902144$ |
| $0,65$ | $0,924625$ |
| $0,66$ | $0,947496$ |
| $0,67$ | $0,970763$ |
| $0,68$ | $0,994432$ |
| $0,69$ | $1,018509$ |
| $0,7$ | $1,043$ |

On a donc $0,68 < \alpha < 0,69$ ou encore $\alpha = 0,68...$ On recommence en balayant l'intervalle $[0,68;0,69]$ avec un pas de $0,001$. On obtient

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $0,68$ | $0,994432$ |
| $0,681$ | $0,996821241$ |
| $0,682$ | $0,999214568$ |
| $0,683$ | $1,001611987$ |
| $0,684$ | $1,004013504$ |
| $0,685$ | $1,006419125$ |
| $0,686$ | $1,008828856$ |
| $0,687$ | $1,011242703$ |
| $0,688$ | $1,013660672$ |
| $0,689$ | $1,016082769$ |
| $0,69$ | $1,018509$ |

En ayant effectués 33 calculs d'images, on a obtenu $0,682 < \alpha < 0,683$ ou encore $\alpha = 0,682$ à $10^{-3}$ près par défaut.

**Méthode par dichotomie.**

On démarre de la même façon : $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$ et donc $0 < \alpha < 1$.

On calcule ensuite la valeur de $f$ au milieu de l'intervalle $[0,1]$ ou encore on calcule $f(0,5)$. Suivant la position de $f(0,5)$ par rapport à $f(\alpha) = 1$, on pourra décider si $\alpha$ est dans $[0;0,5]$ qui est la première moitié de l'intervalle $[0;1]$ ou dans $[0,5;1]$ qui est la deuxième moitié de l'intervalle $[0;1]$.
On trouve $f(0,5) = 0,625$ et donc $f(0,5) < \alpha$ puis $0,5 < \alpha < 1$.

On recommence. On coupe en deux l'intervalle $[0,5;1]$ (la dichotomie est justement la division en deux parties d'un ensemble). On calcule l'image du milieu de cet intervalle par $f$ ou encore on calcule $f(0,75)$ ...

On obtient ainsi successivement des encadrements d'amplitudes $1$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, ... De manière générale, au bout de $n$ étapes, on obtient un encadrement d'amplitude $\dfrac{1}{2^n}$. C'est tout l'intérêt de la méthode. La suite géométrique $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit très vite et on obtient donc rapidement des décimales exactes.

| $x$ | $f(x)$ | encadrement de $\alpha$ | amplitude de l'encadrement |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | |
| $1$ | $2$ | $0 < \alpha < 1$ | $1$ |
| $0,5$ | $0,625$ | $0,5 < \alpha < 1$ | $0,5$ |
| $0,75$ | $1,17\dots$ | $0,5 < \alpha < 0,75$ | $0,25$ |
| $0,625$ | $0,86\dots$ | $0,625 < \alpha < 0,75$ | $0,125$ |
| $0,6875$ | $1,01\dots$ | $0,625 < \alpha < 0,6875$ | $0,0625$ |
| $0,65625$ | $0,93\dots$ | $0,65625 < \alpha < 0,6875$ | $0,03125$ |
| $0,671875$ | $0,97\dots$ | $0,671875 < \alpha < 0,6875$ | $0,015625$ |
| $0,6796875$ | $0,99\dots$ | $0,6796875 < \alpha < 0,6875$ | $0,0078125$ |
| $0,68359375$ | $1,003\dots$ | $0,6796875 < \alpha < 0,68359375$ | $0,00390625$ |
| $0,681640625$ | $0,99\dots$ | $0,681640625 < \alpha < 0,68359375$ | $0,001953125$ |
| $0,6826171875$ | $1,0006\dots$ | $0,681640625 < \alpha < 0,6826171875$ | $0,0009\dots < 10^{-3}$ |

Nous avons calculé douze images seulement et nous avons obtenu un encadrement d'amplitude au plus $10^{-3}$.
La méthode a un défaut : la division en deux parties égales s'adapte assez mal aux décimales d'un nombre. Mais on n'est pas obligé de couper en deux parties égales. A chaque étape, on a le droit de calculer l'image d'un nombre proche du milieu mais qui n'est pas le milieu. Cela donne :

| $x$ | $f(x)$ | encadrement de $\alpha$ | amplitude de l'encadrement |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | |
| $1$ | $2$ | $0 < \alpha < 1$ | $1$ |
| $0,5$ | $0,625$ | $0,5 < \alpha < 1$ | $0,5$ |
| $0,8$ | $1,312$ | $0,5 < \alpha < 0,8$ | $0,3$ |
| $0,7$ | $1,043$ | $0,5 < \alpha < 0,7$ | $0,2$ |
| $0,6$ | $0,816$ | $0,6 < \alpha < 0,7$ | $0,1$ |
| $0,65$ | $0,92\dots$ | $0,65 < \alpha < 0,7$ | $0,05$ |
| $0,68$ | $0,99\dots$ | $0,68 < \alpha < 0,7$ | $0,02$ |
| $0,69$ | $1,01\dots$ | $0,68 < \alpha < 0,69$ | $0,01$ |
| $0,685$ | $1,006\dots$ | $0,68 < \alpha < 0,685$ | $0,005$ |
| $0,683$ | $1.001\dots$ | $0,68 < \alpha < 0,683$ | $0,003$ |
| $0,681$ | $0,99\dots$ | $0,681 < \alpha < 0,683$ | $0,0009\dots < 10^{-3}$ |
| $0,682$ | $0,99\dots$ | $0,682 < \alpha < 0,683$ | $0,001$ |

En ne calculant pas toujours l'image du milieu de l'intervalle, on a légèrement augmenté le nombre d'étapes. Ici, nous sommes passés de douze calculs d'images à treize calculs.

Revenons à notre problème initial. Nous avons que montré l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\alpha$ et nous avons établi que $0,682 < \alpha < 0,683$. Pour achever le travail, il nous reste à représenter graphiquement la fonction $f$ :