

**T.D. : POLYNÔMES.**
**Exercice 1**

Soient les polynômes  $A$ ,  $B$  et  $C$  définis pour tout réel  $x$  par :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \\ B(x) &= 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 2 \\ C(x) &= -x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 7x + 5. \end{aligned}$$

Déterminer l'écriture réduite ordonnée et le degré des polynômes  $P_1 = A + B - C$  ;  $P_2 = A - B + C$  ;  $P_3 = -A + B + C$  ;  $P_4 = A + B + C$ . Comparer  $P_4$  et  $P_1 + P_2 + P_3$ .

**Exercice 2**

Soient les polynômes  $A$ ,  $B$  et  $C$  définis pour tout réel  $x$  par :

$$\begin{aligned} A(x) &= 12x^3 - 8x^2 - 4x \\ B(x) &= -8x^4 + 2x - 1 \\ C(x) &= x^3 - 5x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

1. Déterminer l'écriture réduite ordonnée des polynômes  $AB$  ;  $BC$  ;  $AC$ .
2. Déterminer l'écriture réduite ordonnée et le degré des polynômes  $P_1 = AB + BC + CA$  ;  $P_2 = -AB + BC + CA$  ;  $P_3 = AB - BC + CA$  ;  $P_4 = AB + BC - CA$ .

**Exercice 3**

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants : ( $n$  désigne un entier naturel)

1.  $P(x) = (x^n + 2)(x^n - 2)^2 + 2(x^{2n} - 4) - (x^n - 2)(x^n + 2)^2$  ;
2.  $P(x) = (x + 1)(x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-3}) + (x^n + x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3})(-x^n + x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3})$ .

**Exercice 4** Factoriser les polynômes suivants :

1.  $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$  ;
2.  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$  ;
3.  $P(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$  ;
4.  $P(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$  ;
5.  $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$  ;
6.  $P(x) = x^4 + x^2 + 1$  ;
7.  $P(x) = x^8 + x^4 + 1$ .

**Exercice 5**

Montrer que  $(1 + \sqrt{2})$  et  $(-1 - \sqrt{2})$  sont racines du polynôme :  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ . Factoriser le polynôme  $P$ .

**Exercice 6**

1. Former un polynôme de degré 3, tel que pour tout réel  $x$ , on ait :  $P(x) - P(x - 1) = x^2$ .
2. Former un polynôme de degré 4, tel que pour tout réel  $x$ , on ait :  $P(x) - P(x - 1) = x^3$ .

3. Montrer que  $P : X \mapsto X^4 + a(a + X)(a + 2X)(a + 3X)$  est le carré d'un polynôme.
4. Soit le polynôme  $P : X \mapsto 16X^5 - 20X^3 + 5X$ . Démontrer que  $P - 1$  est égal au produit de  $X \mapsto X - 1$  par le carré d'un polynôme.
5. Démontrer que le polynôme  $X \mapsto X(X + 1)(X + 2)(X + 3) + 1$  est le carré d'un polynôme.
6. Factoriser le polynôme  $X \mapsto X^7 + 27X^4 - X^3 - 27$ .
7. Factoriser les polynômes  $X \mapsto X^4 + X^2 + 1$  ;  $X \mapsto X^4 - X^2 + 1$  ;  $X \mapsto X^4 + 1$ .
8. Etablir que, pour tout entier naturel  $n > 1$ , le polynôme  $A : X \mapsto (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$  est factorisable par  $X(X + 1)(2X + 1)$ .
9. Etablir que, pour tout entier naturel  $n > 0$ , le polynôme  $A : X \mapsto (X^n - 1)(X^{n+1} - 1)$  est factorisable par  $X^3 - X^2 - X + 1$ .
10. Etablir que, pour tout réel  $a$  et  $b$ , le polynôme  $A : X \mapsto X^3 - (2a + b)X^2 + a(a + 2b)X - a^2b$  est divisible par  $(X - b)$ .

**Exercice 7**

Soit  $P$  un polynôme de degré 3 tel que  $P(-1) = 0$ . On suppose en outre qu'il existe trois polynômes  $R, S, T$  tels que, pour tout réel  $X$  on ait :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 1)R(X) + 10 \\ P(X) &= (X - 2)S(X) + 10 \\ P(X) &= (X - 3)T(X) + 10 \end{aligned}$$

Déterminer le polynôme  $P$ .

**Exercice 8**

Calculer la valeur prise par le polynôme  $A(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 4$  en  $a = 1 + \sqrt[3]{2}$ .

**Exercice 9**

Déterminer le polynôme unitaire  $A$ , de degré 3, divisible par  $(x - 1)$  et prenant les mêmes valeurs en 2, 3 et 4.

**Exercice 10**

On considère les polynômes  $A(x) = x^4 - x + a$  et  $B(x) = x^2 - ax + 1$ , où  $a$  désigne un nombre réel. Déterminer  $a$  pour que ces polynômes aient au moins une racine commune.

**Exercice 11**

A - Un problème ancien, que l'on trouve dans de nombreux vieux livres de problèmes, concerne une armée de cinquante kilomètres de long. Alors que l'armée avance à une vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde de l'armée, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?

B - Une armée en carré de cinquante kilomètres de côté parcourt avance à une vitesse constante, pendant qu'un messager part du coin de l'arrière-garde et fait un tour complet autour de l'armée, pour revenir à son point de départ. La vitesse du messager est constante, et il termine le circuit au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?

(*Casse-tête mathématiques ; Sam Loyd ; Editions Dunod.*)