

T.D. : POLYNÔMES.
Exercice 1

Soient les polynômes A , B et C définis pour tout réel x par :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \\ B(x) &= 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 2 \\ C(x) &= -x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 7x + 5. \end{aligned}$$

Déterminer l'écriture réduite ordonnée et le degré des polynômes $P_1 = A + B - C$; $P_2 = A - B + C$; $P_3 = -A + B + C$; $P_4 = A + B + C$. Comparer P_4 et $P_1 + P_2 + P_3$.

Exercice 2

Soient les polynômes A , B et C définis pour tout réel x par :

$$\begin{aligned} A(x) &= 12x^3 - 8x^2 - 4x \\ B(x) &= -8x^4 + 2x - 1 \\ C(x) &= x^3 - 5x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

1. Déterminer l'écriture réduite ordonnée des polynômes AB ; BC ; AC .
2. Déterminer l'écriture réduite ordonnée et le degré des polynômes $P_1 = AB + BC + CA$; $P_2 = -AB + BC + CA$; $P_3 = AB - BC + CA$; $P_4 = AB + BC - CA$.

Exercice 3

Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants : (n désigne un entier naturel)

1. $P(x) = (x^n + 2)(x^n - 2)^2 + 2(x^{2n} - 4) - (x^n - 2)(x^n + 2)^2$;
2. $P(x) = (x + 1)(x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-3}) + (x^n + x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3})(-x^n + x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3})$.

Exercice 4 Factoriser les polynômes suivants :

1. $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$;
2. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;
3. $P(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$;
4. $P(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$;
5. $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$;
6. $P(x) = x^4 + x^2 + 1$;
7. $P(x) = x^8 + x^4 + 1$.

Exercice 5

Montrer que $(1 + \sqrt{2})$ et $(-1 - \sqrt{2})$ sont racines du polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$. Factoriser le polynôme P .

Exercice 6

1. Former un polynôme de degré 3, tel que pour tout réel x , on ait : $P(x) - P(x - 1) = x^2$.
2. Former un polynôme de degré 4, tel que pour tout réel x , on ait : $P(x) - P(x - 1) = x^3$.

3. Montrer que $P : X \mapsto X^4 + a(a + X)(a + 2X)(a + 3X)$ est le carré d'un polynôme.
4. Soit le polynôme $P : X \mapsto 16X^5 - 20X^3 + 5X$. Démontrer que $P - 1$ est égal au produit de $X \mapsto X - 1$ par le carré d'un polynôme.
5. Démontrer que le polynôme $X \mapsto X(X + 1)(X + 2)(X + 3) + 1$ est le carré d'un polynôme.
6. Factoriser le polynôme $X \mapsto X^7 + 27X^4 - X^3 - 27$.
7. Factoriser les polynômes $X \mapsto X^4 + X^2 + 1$; $X \mapsto X^4 - X^2 + 1$; $X \mapsto X^4 + 1$.
8. Etablir que, pour tout entier naturel $n > 1$, le polynôme $A : X \mapsto (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est factorisable par $X(X + 1)(2X + 1)$.
9. Etablir que, pour tout entier naturel $n > 0$, le polynôme $A : X \mapsto (X^n - 1)(X^{n+1} - 1)$ est factorisable par $X^3 - X^2 - X + 1$.
10. Etablir que, pour tout réel a et b , le polynôme $A : X \mapsto X^3 - (2a + b)X^2 + a(a + 2b)X - a^2b$ est divisible par $(X - b)$.

Exercice 7

Soit P un polynôme de degré 3 tel que $P(-1) = 0$. On suppose en outre qu'il existe trois polynômes R, S, T tels que, pour tout réel X on ait :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 1)R(X) + 10 \\ P(X) &= (X - 2)S(X) + 10 \\ P(X) &= (X - 3)T(X) + 10 \end{aligned}$$

Déterminer le polynôme P .

Exercice 8

Calculer la valeur prise par le polynôme $A(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ en $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Exercice 9

Déterminer le polynôme unitaire A , de degré 3, divisible par $(x - 1)$ et prenant les mêmes valeurs en 2, 3 et 4.

Exercice 10

On considère les polynômes $A(x) = x^4 - x + a$ et $B(x) = x^2 - ax + 1$, où a désigne un nombre réel. Déterminer a pour que ces polynômes aient au moins une racine commune.

Exercice 11

A - Un problème ancien, que l'on trouve dans de nombreux vieux livres de problèmes, concerne une armée de cinquante kilomètres de long. Alors que l'armée avance à une vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde de l'armée, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?

B - Une armée en carré de cinquante kilomètres de côté parcourt avance à une vitesse constante, pendant qu'un messager part du coin de l'arrière-garde et fait un tour complet autour de l'armée, pour revenir à son point de départ. La vitesse du messager est constante, et il termine le circuit au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?

(*Casse-tête mathématiques ; Sam Loyd ; Editions Dunod.*)