T.D. : BARYCENTRES

Exercice 1

On considère le trapèze $ABCD$. Soit O le point de concours des droites (AD) et (BC), et Ω celui des droites (AC) et (BD). Montrer que la droite $(O\Omega)$ passe par les milieux I et J des segments $[AB]$ et $[CD]$.

Exercice 2

Soit un triangle ABC, on désigne par F et G les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Les points D et E sont définis par :

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

On note H le point d'intersection des droites (EG) et (DF). Déterminer le réel a tel que $\overrightarrow{GH} = a\overrightarrow{GE}$.

Exercice 3

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On appelle G le centre de gravité du tirangle ABC, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le point défini par $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et L le point défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$. Montrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Exercice 4

Un triangle ABC est isocèle de sommet A. G est l'isobarycentre de A, B, C.

1. G' est le symétrique de G par rapport à (CB). Déterminer les réels b et c pour que G' soit le barycentre des points A, B, C, respectivement affectés des coefficients $1, b, c$.
2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||.$$

Exercice 5

A, B, C, D sont quatre points non coplanaires de l'espace, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
$m \in \mathbb{R} - \{0\}$, G_m est le barycentre de $(A, 1)$; $(B, 1)$; $(C, m-2)$ et (D, m).

1. Construire G_2 et G_1. En déduire que G_2 est le milieu de $[G_1 J]$.
2. Montrer que :

$$\overrightarrow{IG_m} = \frac{(m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID}}{2m}.$$

   En déduire que l'ensemble S des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R} - \{0\}$ est inclus dans un plan.
3. Montrer que $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant. Déduire S.

Exercice 6

Soit A, B, C trois points du plan. On désigne par f l'application qui, à tout point M du plan, associe le vecteur $f(M)$, défini par :

$$\forall M \in P \quad f(M) = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que l'application f est bijective.

Exercice 6

Démontrer le théorème de Desargues : *Trois droites d_1, d_2 et d_3 concourent au point O. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs sommets sur chacune des trois droites (A et A' sur d_1, B et B' sur d_2, C et C' sur d_3). On suppose que les côtés homologués ((AB) et ($A'B'$), (BC) et ($B'C'$), ou (AC) et ($A'C'$)) sont sécants en I, J et K. Alors I, J et K sont alignés.*