Cálculo de probabilidades mediante espinores.

En temas anteriores hemos estudiado cómo se pueden calcular probabilidades en mecánica cuántica. Si tenemos un observable A de espectro discreto no degenerado, compuesto por los números a y los autovectores correspondientes $|a\rangle$, la probabilidad de que al medir A obtengamos como resultado el valor a si la partícula se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ viene dada por $|\langle a|\psi\rangle|^2$. Del mismo modo si el espectro es continuo, caracterizado por una variable continua α y si los autovectores correspondientes son $|\alpha\rangle$ la probabilidad de que al medir obtengamos un valor comprendido entre α y $\alpha + d\alpha$ viene dada por $|\langle \alpha|\psi\rangle|^2\, d\alpha$. De esta forma podemos dar una interpretación física a las dos componentes de un espinor como sigue. El vector $|\mathbf{r}, +\rangle$ es un autovector común al operador de posición y a la componente z de espín, de autovalores $\mathbf{r}$ y $\frac{\hbar}{2}$. Por tanto, la probabilidad de que al medir la posición de la partícula y la componente z del espín obtengamos como resultado que la partícula se encuetra en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ alrededor de la posición $\mathbf{r}$ y la componente z del espín valga $\frac{\hbar}{2}$ viene dada por:

$$|\langle \mathbf{r}, +|\psi\rangle|^2\, d^3\mathbf{r} = \left|\psi_+(\mathbf{r})\right|^2 d^3\mathbf{r}$$

Del mismo modo, la probabilidad de que al medir la posición de la partícula y la componente z del espín obtengamos como resultado que la partícula se encuetra en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ alrededor de la posición $\mathbf{r}$ y la componente z del espín valga $-\frac{\hbar}{2}$ viene dada por:

$$|\langle \mathbf{r}, -|\psi\rangle|^2\, d^3\mathbf{r} = \left|\psi_-(\mathbf{r})\right|^2 d^3\mathbf{r}$$

A partir de estas probabilidades podemos encontrar otras. Por ejemplo, la probabilidad de que al medir la posición obtengamos que la partícula se encuentre en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ alrededor de la posición $\mathbf{r}$, si no medimos el espín, viene dada por:

$$\left(|\langle \mathbf{r}, +|\psi\rangle|^2 + |\langle \mathbf{r}, -|\psi\rangle|^2\right) d^3\mathbf{r} = \left(\left|\psi_+(\mathbf{r})\right|^2 + \left|\psi_-(\mathbf{r})\right|^2\right) d^3\mathbf{r}$$

La probabilidad de que al medir la componente z del espín obtengamos el valor $\frac{\hbar}{2}$, si no medimos la posición de la partícula, viene dada por:

$$\int d^3r\ \left|\psi_+(\mathbf{r})\right|^2$$

Del mismo modo, la probabilidad de que al medir la componente z del espín obtengamos el valor $-\frac{\hbar}{2}$, si no medimos la posición de la partícula, viene dada por:

$$\int d^3r\ \left|\psi_-(\mathbf{r})\right|^2$$

Podemos calcular de la misma forma otras probabilidades. Por ejemplo vamos a calcular la densidad de probabilidad de la posición y de obtener simultáneamente el valor $\frac{\hbar}{2}$ para la componente x del espín. Para ello necesitamos conocer el autovector común a la posición y al operador $\hat{S}_x$ con autovalores $\mathbf{r}$ y $\frac{\hbar}{2}$. Este autovector es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathbf{r}, +\rangle + |\mathbf{r}, -\rangle\right)$$

Por tanto la probabilidad de que al medir la posición de la partícula y la componente x del espín obtengamos como resultado que la partícula se encuentre en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ alrededor de la posición $\mathbf{r}$ y que la componente x del espín valga $\frac{\hbar}{2}$ viene dada por:

$$\left|\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle r,+| + \langle r,-|\right)|\psi\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\psi_+(\mathbf{r}) + \psi_-(\mathbf{r})\right|^2$$

De la misma forma podemos calcular otras probabilidades para la posición y el espín. Vamos a ver ahora cómo calcular probabilidades en las que intervenga el momento, para lo cual necesitamos conocer los autovectores comunes al momento y a una componente del espín que como siempre será $\hat{S}_z$. Si notamos por $|\mathbf{p},\pm\rangle$ a estos autovectores en la representación coordenadas serán:

$$\langle\mathbf{r},\pm|\mathbf{p},\pm\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \qquad \langle\mathbf{r},\pm|\mathbf{p},\mp\rangle = 0$$

El estado de una partícula $|\psi\rangle$ se puede expresar utilizando la representación de momentos introduciendo la relación de cierre como sigue:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \int d^3\mathbf{p}\ \left(|\mathbf{p},+\rangle\langle\mathbf{p},+|\psi\rangle + |\mathbf{p},-\rangle\langle\mathbf{p},-|\psi\rangle\right) = \\
&= \int d^3\mathbf{p}\ \left(\langle\mathbf{p},+|\psi\rangle|\mathbf{p},+\rangle + \langle\mathbf{p},-|\psi\rangle|\mathbf{p},-\rangle\right)
\end{aligned}$$

El producto escalar $\langle\mathbf{p},+|\psi\rangle$ es una función de $\mathbf{p}$ que la notaremos por $\bar{\psi}_+(\mathbf{p})$ y del mismo modo $\langle\mathbf{p},-|\psi\rangle = \bar{\psi}_-(\mathbf{p})$. Por tanto la ecuación anterior se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{p}\ \left(\bar{\psi}_+(\mathbf{p})|\mathbf{p},+\rangle + \bar{\psi}_-(\mathbf{p})|\mathbf{p},-\rangle\right)$$

El cambio de la representación coordenadas a la representación de momentos se realiza como siempre introduciendo la relación de cierre:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_+(\mathbf{p}) &= \langle\mathbf{p},+|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{r}\ \left(\langle\mathbf{p},+|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle + \langle\mathbf{p},+|\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\right) = \\
&= \int d^3\mathbf{r}\ \langle\mathbf{p},+|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\int d^3\mathbf{r}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\ \psi_+(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

y de la misma forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_-(\mathbf{p}) &= \langle\mathbf{p},-|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{r}\ \left(\langle\mathbf{p},-|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle + \langle\mathbf{p},-|\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\right) = \\
&= \int d^3\mathbf{r}\ \langle\mathbf{p},-|\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2}\int d^3\mathbf{r}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\ \psi_-(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Podemos definir también espinores en el espacio de momentos, de modo que el estado de una partícula puede estar representado por la siguiente matriz columna:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_+(\mathbf{p}) \\ \bar{\psi}_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

El cambio de representación en notación espinorial es como sigue:

$$\left(\begin{array}{c} \bar{\psi}_+(\mathbf{p}) \\ \bar{\psi}_-(\mathbf{p}) \end{array} \right) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3\mathbf{r}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \left(\begin{array}{c} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{array} \right)$$

El significado físico de las funciones $\bar{\psi}_\pm(\mathbf{p})$ es el siguiente. El cuadrado de la función $\psi_+(p)$ nos da la densidad de probabilidad de que al medir el momento de la partícula y la componente z del espín obtengamos como resultado que la partícula tiene su momento en el elemento $d^3\mathbf{p}$ alrededor del valor $\mathbf{p}$ y la componente z del espín $\frac{\hbar}{2}$. Del mismo modo, la función $\psi_-(p)$ nos da la densidad de probabilidad de que al medir el momento de la partícula y la componente z del espín obtengamos como resultado que la partícula tiene su momento en el elemento $d^3\mathbf{p}$ alrededor del valor $\mathbf{p}$ y la componente z del espín $-\frac{\hbar}{2}$. De la misma forma que para la posición las funciones $\bar{\psi}_\pm(\mathbf{p})$ nos permiten calcular otras probabilidades relacionadas con la medida del momento de la partícula y del espín.