Travaux Dirigés n°37 : Géométrie analytique.

EXERCICE I Soit (O ; i, j, k) un repère cartésien de l'espace.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite d contenant le point A(3, 2, 1), et dirigée par le vecteur u(2, 5, –4).
2. Les points suivants sont-ils des éléments de d ?
   F(9, 17, –11) ; G(11, 22, –10) ; H(5, 7, –3) ; I(1, –3, 5).
3. Trouver, s'il existe, un point de d dont l'abscisse soit 6.
4. Trouver, s'il existe, un point de d dont la cote soit 3.
5. Déterminer $d \cap (xOy)$; $d \cap (yOz)$; $d \cap (xOz)$.
6. Déterminer $d \cap (x'x)$; $d \cap (y'y)$; $d \cap (z'z)$.
7. Donner la représentation paramétrique de la droite d utilisant le repère (H, –u) de d.

EXERCICE II Soit (O ; i, j, k) un repère cartésien de l'espace.
Etudier dans chacun des cas suivants, la position relative des droites d et d' dont les représentations paramétriques sont données ci-dessous.

1° d : $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = -1 - 4\mu \\ y = 2 - 6\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$ 2° d : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 5 - 6\mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$

3° d : $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$ 4° d : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ d' : $\begin{cases} x = -1 - \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$.

EXERCICE III Soit (O ; i, j, k) un repère cartésien de l'espace.
Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Soient P et P' deux plans de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -5 - \lambda' \\ y = 3 + \lambda' + 3\mu' \\ z = \lambda' + \mu' \end{cases}$.
Etudier les intersections $d \cap P$ et $d \cap P'$.

EXERCICE IV Soit (O ; i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
Soit P le plan d'équation cartésienne : x – y – 2z – 4 = 0.
Soit P' le plan d'équation cartésienne : 4x – y + z – 7 = 0. Soit la droite d : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

1. Donner une représentation paramétrique des plans P et P'.
2. Démontrer que $P \cap P'$ est une droite Δ dont on précisera une représentation paramétrique.
3. Etudier $d \cap P$ et $d \cap P'$. En déduire que les droites d et Δ sont parallèles.

EXERCICE V Soit (O ; i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
Soit P_1, P_2, P_3 et P_4 les plans d'équations cartésiennes respectives :
$x - y - 2z - 4 = 0$; $4x - y + z - 7 = 0$; $2x + y + 5z + 1 = 0$; $2x + y + 5z - 5 = 0$.

1. Donner un repère de chacun de ces plans. Montrer que P_3 et P_4 sont strictement parallèles.

2. Résoudre chacun des systèmes $\begin{cases} x-2y-2z-4=0 \\ 4x-y+z-7=0 \\ 2x+y+5z+1=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-2y-z-4=0 \\ 4x-y+z-7=0 \\ 2x+y+5z-5=0 \end{cases}$.
3. En déduire l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ et l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_4$. Faire un schéma.

EXERCICE VI Soit (O ; i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
Soit P et P' deux plans définis par les représentations paramétriques suivantes :

$$P : \begin{cases} x = 4-\lambda+5\mu \\ y = 1+4\lambda+\mu \\ z = -2-\lambda-2\mu \end{cases} \quad \text{et} \quad P' : \begin{cases} x = 2s-t \\ y = -1-5s+2t \\ z = 2+s-t \end{cases}.$$

1. Déterminer l'intersection du plan P avec le plan (xOy).
2. Déterminer $P \cap P'$.

EXERCICE VII Soit (O ; i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
1. Représenter les points A(2, 0, 0) ; B(0, 4, 0) ; C(0, 0, 3). Ecrire une représentation paramétrique du plan (ABC). Le point $F(1, 0, \frac{3}{2})$ appartient-il au plan (ABC) ?
2. Former une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Représenter les points I(4, 0, 0) ; G(0, –4, 6) ; L(0, –2, 4). Ecrire une représentation paramétrique des droites (IF) et (GL).
4. Justifier que les droites (GL) et (Oy) ont un point commun J que l'on précisera.
5. Justifier que les droites (GL) et (IF) ont un point commun K appartenant à (Oz).
6. Ecrire une représentation paramétrique du plan P déterminé par les droites (GL) et (IF).
7. Déterminer l'intersection Δ du plan P et du plan (ABC).
8. Justifier que $\Delta \cap$ (xOy) est un singleton {E} et que E appartient aux droites (AB) et (IJ).

EXERCICE VIII Soit (O ; i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
1. Représenter les points $A(2\sqrt{3}, 0, 0)$; B(0, 2, 0) ; C(0, 0, 1).
2. Former une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point O sur le plan (ABC).
4. Calculer de deux façons différentes la distance de O au plan (ABC).
5. Démontrer que le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB).
6. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
7. Justifier que les points O et C ont même projeté orthogonal K sur la droite (AB). Préciser les coordonnées de K.
8. Déterminer une mesure θ, en degrés, de l'angle géométrique OKC. En déduire une mesure α ,en degrés, de l'angle géométrique OCK.
9. Déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC. Préciser le rayon r de cette sphère. Former une équation cartésienne de cette sphère.
10. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre OABC. Vérifier que G est le milieu de $[O\Omega]$.

EXERCICE IX Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j), on considère les points A(4, 1) ; B(–1, 3) ; C(2, –1).
1. Déterminer les coordonnées du barycentre I des points A, B, C affectés des coefficients respectifs –3, –1, 3.
2. M étant un point quelconque du plan, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$.
3. Déterminer les coefficients a, b et c pour que O soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs a, b, c.

BACCALAUREAT, Série S, Sujet complémentaire, Juin 1997.

EXERCICE XII Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; u, v). Lorsqu'un point est désigné par une lettre majuscule, on convient de désigner son affixe par la lettre minuscule correspondante. Soit A, B, C trois points du plan. On note G leur isobarycentre. A tout point M du plan, on associe les points M_1, M_2 et M_3, isobarycentres respectifs de {M, B, C}, {M, A, C} et {M, A, B}. On note enfin M' l'isobarycentre de {M_1, M_2, M_3}.

1. Tracer le triangle ABC et son isobarycentre sur une figure. Exprimer g en fonction de a,b,c.
2. Exprimer m_1, m_2, m_3 puis m' en fonction de m, a, b, c.
3. Soit f l'application du plan qui, à tout point M du plan, associe le point M'.
   a) Montrer que : $m'-g = \frac{1}{3}(m-g)$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
   c) Placer sur la figure l'image A'B'C' du triangle ABC par f.
   d) Déterminer le rapport des aires de ces deux triangles.

BACCALAUREAT, Série S, Centres Etrangers Groupe 1, Juin 1996.

EXERCICE XIII L'espace E est rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j, k). On appelle P le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

1. Soit M(x, y, z) un point hors de P et M'(x', y', z') son projeté orthogonal sur P. Exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z.
2. On considère les points A(1, 1, –2) ; B(0, –1, 2) et C(–12, 0, –7).
   a) Déterminer les coordonnées du barycentre G du système { (A, 2) ; (B, 2) ; (C, 1) }.
   b) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2.
   c) Soit φ l'application de E vers R définie pour tout $M \in E$ par : $\varphi(M) = 2MA^2 + 2MB^2 + MC^2$. Quel est le minimum de $\varphi(M)$ quand M décrit P ?

BACCALAUREAT, Série E, Paris, Septembre 1983.