Der deutsche Wikipedia-Artikel zur Quantenteleportation ist tatsächlich falsch.

Statt

$$Z\{a,b,c\} = B\{a,b\} \otimes z_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} B_i\{a,c\} \otimes z_{i,b},\ z = \alpha h + \beta v$$
$$z_1 = z,\ z_2 = Sz,\ z_3 = SDz,\ z_4 = Dz,$$
$$B_1\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a h_b + v_a v_b\right),\ B_2\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a h_b - v_a v_b\right),$$
$$B_3\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a v_b + v_a h_b\right),\ B_4\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a v_b - v_a h_b\right)$$

muss es heißen

$$Z\{c,a,b\} = z_c \otimes B\{a,b\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} B_i\{c,a\} \otimes z_{i,b},\ z = \alpha h + \beta v$$
$$z_1 = z,\ z_2 = Sz,\ z_3 = SDz,\ z_4 = -Dz,$$
$$B_1\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a h_b + v_a v_b\right),\ B_2\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a h_b - v_a v_b\right),$$
$$B_3\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a v_b + v_a h_b\right),\ B_4\{a,b\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_a v_b - v_a h_b\right)$$

Dabei ist $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = T\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

"Beweis" -> einfach nachrechen:

Einerseits

$$Z\{c,a,b\} = z_c \otimes B\{a,b\} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Andererseits

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} B_i\{c,a\} z_{i,b} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 2\alpha \\ 2\beta \\ 0 \\ 0 \\ 2\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

q.e.d.

Nachtrag: Die Bellzustände $B_1...B_4\{c, a\}$ bilden eine Basis von $H_c \otimes H_a$, der Basiswechsel bezieht sich auf den Produktraum $H_c \otimes H_a \otimes H_b$ und besteht aus dem Übergang

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\\0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Präparierung von {c, a} in einen der 4 Bellzustände verläuft aber in $H_c \otimes H_a$, es wird also auch nur hier gemessen, man hat also mit den 4 Bellzuständen

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

tatsächlich eine Basis von $H_c \otimes H_a$ und jeder der Zustände geht mit Amplitude $\frac{1}{2}$, also Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, in die Superposition ein.

Nochmal explizit:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass sich vor der Messung in $H_c \otimes H_a$ die Photonen {c, a} in der Superposition

$$Z\{c,a\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

befinden müssten, wobei aber jeder der vier möglichen Eigenzustände mit einem anderen Zustand in {b} verknüpft ist. Wie man leicht sieht, ist

$$Z\{c,a\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$