Componentes estandard del momento angular.

En los próximos apartados resolveremos el problema de autovalores del momento angular. Según hemos visto, podemos obtener una base de autofunciones comunes a una de las componentes del momento angular y al módulo del momento angular. Por ejemplo, podemos construir autofunciones comunes a $\hat{L}^2$ y a $\hat{L}_z$. Cuando estudiamos el oscilador armónico simple en mecánica cuántica, el hamiltoniano se podía escribir de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\bar{x}^2 + \bar{p}^2\right)$$

Dijimos que si $\bar{x}$ y $\bar{p}$ fueran números en lugar de operadores, el hamiltoniano se podría escribir de la forma $\hbar\omega\left(\bar{x} + i\bar{p}\right)\left(\bar{x} - i\bar{p}\right)/2$. Aunque en realidad $\bar{x}$ y $\bar{p}$ no son números el definir dos operadores de la forma $a = \left(\bar{x} + i\bar{p}\right)/\sqrt{2}$ y $a^\dagger = \left(\bar{x} - i\bar{p}\right)/\sqrt{2}$ nos fue de gran ayuda para resolver el problema de autovalores del hamiltoniano. De la misma forma, para diagonalizar simultáneamente los operadores $\hat{L}^2\left(= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2\right)$ y $\hat{L}_z$, podemos definir los siguientes dos operadores que nos serán de gran utilidad:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad y \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

Los operadores $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ y $\hat{L}_z$ los denominaremos componentes estandard del momento angular. Podemos obtener las siguientes reglas de conmutación para las componentes estandard:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_+\right] &= \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x + i\hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_x = \hbar\hat{L}_+ \\
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x - i\hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x = -\hbar\hat{L}_- \\
\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y\right] = 2\hbar L_z
\end{aligned}$$

Por último, como $\hat{L}^2$ conmuta con todas las componentes del momento angular, también conmutará con los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$.

Podemos escribir las expresiones de los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ en la representación coordenadas utilizando las coordenadas esféricas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{r} \middle| \hat{L}_+ \middle| \psi \right\rangle &= \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(\mathbf{r}) \\
\left\langle \mathbf{r} \middle| \hat{L}_- \middle| \psi \right\rangle &= \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos a expresar el módulo al cuadrado del momento angular en función de los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_+\hat{L}_- &= \left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i\left(\hat{L}_y\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_y\right) = \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i\left(-i\hbar\hat{L}_z\right) + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2 + \hbar\hat{L}_z - \hat{L}_z^2
\end{aligned}$$

De modo que:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$$

Podemos expresarlo también de otra forma como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{L}_-\hat{L}_+ &= \left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i\left(\hat{L}_y\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_y\right) = \\ &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i\left(-i\hbar\hat{L}_z\right) + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2 - \hbar\hat{L}_z - \hat{L}_z^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$