Banderas en el cubo de Rubik

* * *

Por José RUIZ SANTAELLA

El cubo de Rubik es un cubo regular con caras de distintos colores. Los colores más corrientes, en caras opuestas, son: rojo (R) - naranja (N), azul (Z) - verde (V) - amarillo (A) y blanco (B).

Los nombres de las caras son: «a» = arriba, «b» = abajo, «f» = frente, «t» = atrás, «i» = izquierda y «d» = derecha.

Los giros independientes de las caras del cubo permiten obtener distintas banderas.

Los tipos de banderas que se pueden obtener son los siguientes:

1) Banderas con tres franjas de igual anchura y de colores distintos. Franjas verticales y horizontales.
2) Banderas con dos franjas de distinta anchura y de dos colores. La franja más ancha es doble que la estrecha. Franjas verticales y horizontales.
3) Banderas en forma de cruz de brazos cortos.
4) Banderas en forma de cruz de brazos largos.
5) Banderas en forma de diagonales.
6) Banderas de lunares.

En primer lugar indicaremos que las caras del cubo son cuadradas y las de las banderas son rectángulos, el lado horizontal más largo que el vertical.

En segundo lugar los colores de las banderas que se pueden hacer son sólo los que tienen las caras del cubo.

Si una bandera tiene un color que no tiene el cubo se pueden pegar en una cara del cubo pegatinas del color que no exista en el cubo.

En tercer lugar, como las caras del cubo son de color uniforme, no se pueden hacar banderas en las que existan escudos, castilletes, animales, plantas u otros adornos que tienen algunas banderas.

En cuarto lugar, la diferencia de la forma de las caras del cubo y las banderas, cuadrados y rectángulos, hace que las banderas con forma de cruces de brazos cortos tengan esquinas cuadradas en el cubo y rectangulares en las banderas.

En las banderas de forma de cruces de brazos largos los espacios entre los brazos de las cruces son cuadrados en el cubo y triangulares en las banderas.

Veamos los distintos tipos de banderas que se pueden hacer:

1) **Banderas de tres franjas de distintos colores y de igual anchura entre ellas.**

Las posibles combinaciones en este tipo de banderas son: las que produzcan seis colores tomados tres a tres: $\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$, es decir, 20 banderas distintas se pueden formar. Las 20 combinaciones distintas son:

1,2,3 / 1,2,4 / 1,2,5 / 1,2,6	= 4
1,3,4 / 1,3,5 / 1,3,6	= 3
1,4,5 / 1,4,6	= 2
1,5,6	= 1
SUMA	= 10
2,3,4 / 2,3,5 / 2,3,6	= 3
2,4,5 / 2,4,6	= 2
2,5,6	= 1
SUMA	= 6
3,4,5 / 3,4,6	= 2
3,5,6	= 1
SUMA	= 3
4,5,6	= 1
SUMA TOTAL	= 20

Los colores de las caras del cubo, por orden alfabético, son: 1.º amarillo = A, 2.º azul = Z, 3.º blanco = B, 4.º naranja = N, 5.º rojo = R y 6.º verde = V.

Sustituyendo los números por los correspondientes colores, las combinaciones serían:

AZB / AZN / AZR / AZV	= 4
ABN / ABR / ABV	= 3
ANR / ANV	= 2
ARV	= 1
SUMA	= 10

ZBN / ZBR / ZBV	= 3
ZNR / ZNV	= 2
ZRV	= 1
SUMA	= 6
BNR / BNV	= 2
BRV	= 1
SUMA	= 3
NRV	= 1
SUMA TOTAL	= 20

Las tres franjas de cada combinación pueden tener las colocaciones siguientes:
1,2,3 / 1,3,2 / 2,3,1 / 2,1,3 / 3,1,2 / 3,2,1 .... =6,
luego 20 x 6 = 120 banderas distintas que se pueden formar con los seis colores del cubo.

Entre las 20 combinaciones indicadas mostraremos los órdenes de colocación de la primera (AZB) y de la última (NRV).

AZB

AZB / ABZ / ZBA / ZAB / BAZ / BZA................ =6

NRV

NRV / NVR / RVN / RNV / VNR / VRN............. =6

Y lo mismo se hace en las restantes combinaciones.

Como vemos, se forman 120 banderas distintas, horizontales así como verticales, luego en total se forman 240 banderas distintas.

Además hay que considerar las banderas de tres franjas con sólo dos colores, como la española, la andaluza y otras más.

La distribución de colores en estas banderas es 1/2/1 en la que el número 2 indica la barra del centro, tanto para verticales como para horizontales.

La barra del centro contiene la pieza central de cada cara (C.C. = cubo central), o sea que podrá tener seis colores distintos. Las barras extremas (1,1) podrán tener cinco colores distintos (sin contar el color de la C.C.). Por tanto, se podrán formar 6 x 5 colores = 30 banderas distintas. Pudiendo ser estas banderas tanto de franjas verticales como de franjas horizontales se formarán en total 60 banderas distintas de este tipo.

Los casos posibles, expresados en colores, son:

ZAZ / BAB / NAN / RAR / VAV	= 5
AZA / BZB / NZN / RZR / VZV	= 5
ABA / ZBZ / NBN / RBR / VBV	= 5
ANA / ZNZ / BNB / RNR / VNV	= 5
ARA / ZRZ / BRB / NRN / VRV	= 5
AVA / ZVZ / BVB / NVN / RVR	= 5
SUMA	= 30

Estas 30 combinaciones son tanto para franjas verticales como horizontales.

Todas estas banderas (240 + 30 + 30 = 300) se pueden hacer perfectamente en el cubo.

En todos los casos se procede igual. Primero se coloca el cubo en la posición más favorable para obtener la bandera que se desea con el mínimo número de movimiento de las caras. Segundo, se determina la fórmula que nos indique los giros que hay que hacer para obtener la bandera.

Como ejemplo, entre las 300 banderas posibles, veamos alguna de ellas:

Bandera francesa: Consta de tres franjas verticales de colores azul, blanco y rojo (1). La posición de salida es: b=B, f=Z, d=R, i=N, t=V. La fórmula es I/TAT^{-1} / D^{2} / DAD^{-1} /, la bandera sale en la cara b. Sale correcta, no hay ninguna figura en el original.

La fijación de la posición correcta de salida es muy importante. Esta bandera la ha obtenido Warusfel (4), con 31 movimientos. Nosotros sólo hemos empleado 8 (D^{2} lo consideramos un movimiento).

Bandera húngara: Consta de tres barras horizontales de colores rojo, blanco y verde (1). La posición de salida es: b=B, f=V, d=N, i=R, t=Z.

La fórmula es T / DAD^{-1} / F^{2} / FAF^{-1} /, la bandera sale en la cara b. Sale correcta, original sin añadidos.

Warusfel (4) la obtiene con 32 movimientos. Nosotros sólo hacemos 8.

Bandera italiana: Está formada por tres franjas verticales de colores verde, blanco y rojo (1). La posición de salida es: b=B, f=Z, d=R, i=N, t=V. La fórmula es I^{-1} / TAT^{-1} / D^{2} / DAD^{-1} /; la bandera sale en la cara b. Sale correcta pues el original no tiene añadidos. La primera franja vertical tiene un color que no lo tiene el cubo; en su lugar se ha puesto el verde.

Bandera de Chad: Está formada por tres franjas verticales de colores azul, amarillo y rojo (2). Posición de salida: b=A, f=V, d=R, i=N, t=Z. La fórmula es I^{-1} / TAT^{-1} / D^{2} / DAD^{-1}/; sale en cara b. La bandera sale correcta pues el original no tiene ningún dibujo.

Bandera de Ghana: Está formada por tres franjas horizontales de colores rojo, amarillo y verde (1). La posición de salida es: b=A, f=V, d=R, i=N, t=Z. La fórmula es T^{-1} / DAD^{-1} / F^{2} / FAF^{-1} /; bandera en cara b. El original tiene una estrella de cinco puntas en el centro que no la puede hacer el cubo.

Bandera de Guinea: La bandera está formada por tres franjas verticales de colores rojo, amarillo y verde (1). La posición de salida es: b=A, f=N, d=V, i=Z, t=R. La fórmula es I^{-1} / TAT^{-1} / D^{2} / DAD^{-1} /; sale correcta, original sin añadidos.

Bandera de los Países Bajos: Está formada por tres franjas horizontales de colores rojo, blanco y azul (1). La posición de salida es: b=B, f=Z, d=R, i=N, t=V. La fórmula es T^{-1} / DAD^{-1} / F^{2} / FAF^{-1} /. La bandera sale en la cara b. Sale correcta, original sin añadidos. El azul de la bandera es más claro que el del cubo.

Bandera de Irán: La bandera consta de tres franjas horizontales de colores verde, blanco y rojo (1). La posición de salida es: b=B, f=R, d=V, i=Z, t=N. La fórmula es T^{-1} / DAD^{-1} / F^2 / FAF^{-1} /. La bandera sale en la cara b. Sale correcta, original sin añadidos.

Bandera de Luxemburgo: La bandera consta de tres franjas horizontales de colores rojo, blanco y azul (1). La salida es: b=B, f=Z, d=R, i=N, t=V. La fórmula es T^{-1} / DAD^{-1} / F^2 / FAF^{-1} /; bandera en cara b. El original tiene color azul claro en la franja inferior. El cubo tiene el color azul oscuro.

Bandera de Ruanda: La bandera consta de tres franjas verticales de colores rojo, amarillo y verde (1). La posición de salida es: b=A, f=N, d=V, i=Z, t=R. La fórmula es I^{-1} / TAT^{-1} / D^2 / DAD^{-1} /; bandera en cara b. Original con R en franja amarilla. La R no se puede hacer en el cubo.

Bandera de España: Consta de tres franjas horizontales de colores rojo, amarillo y rojo. La salida es: b=V, f=R, d=A, i=B, t=N. La fórmula es A^{-1} B; bandera en cara d. La franja central, amarilla, es doble de las franjas rojas. En el cubo las tres franjas son de igual anchura.

Bandera de Andalucía: La bandera consta de tres franjas horizontales de colores verde, blanco, verde. La salida es: b=R, f=B, d=Z, i=V, t=A. La fórmula es A^{-1} B; bandera en cara f. La bandera tiene varias franjas verdes y blancas, que se suceden. En el cubo sólo se pueden hacer tres franjas.

Además tienen banderas de tres franjas y de dos colores los países siguientes: Austria, Canadá, Líbano, Mongolia, Nicaragua, Nigeria, Perú y otros (1).

Estas banderas pueden hacerse también en el cubo pero no las hacemos por no alargar demasiado este artículo.

2) Banderas de dos colores en dos franjas, la anchura de una de ellas doble que la otra

Como siempre, las franjas de estas banderas pueden ser verticales u horizontales. La franja más estrecha puede quedar a la izquierda o a la derecha de la franja más ancha, en las banderas de franja vertical. En banderas de franjas horizontales la franja más estrecha puede quedar en la parte superior o en la parte inferior.

La franja de más anchura contiene siempre la pieza central de cada cara, que es la que determina el color.

Como hay seis colores distintos, habrá seis banderas de distinto color que unidos a los cinco colores distintos que puede tener la franja estrecha hacen un total 6 x 5 = 30 banderas; tanto verticales como horizontales, con un total de 120 banderas.

Las combinaciones de colores, empezando por la franja más estrecha, son:

AZ, AB, AN, AR, AV	= 5
ZA, ZB, ZN, ZR, ZV	= 5
BA, BZ, BN, BR, BV	= 5
NA, NZ, NB, NR, NV	= 5
RA, RZ, RB, RN, RV..............................	= 5
VA, VZ, VB, VN, VR..............................	= 5
SUMA	=30

Orden de colocación de las combinaciones: de la primera (AZ), orden AZ, ZA; de la última VR, RV. De la misma manera se haría en las restantes combinaciones no indicadas.

Todas estas 120 banderas se pueden hacer en el cubo. Como ejemplo veamos algunas:

Bandera de Portugal (1): Consta de dos franjas verticales, la primera estrecha de color verde, la segunda ancha de color rojo. Salida: b=R, f=V, d=B, i=A, t=Z. La fórmula es /I/. Con un solo movimiento sale la bandera en la cara b. El original tiene un gráfico que no se puede hacer en el cubo.

Bandera de Quatar (1): Consta de dos franjas verticales, la estrecha de color blanco y la ancha de color gris. La salida es: b=Z, f=B, d=N, i=R, t=A. La fórmula es /I/. La bandera sale en la cara b. Las dos franjas del original están separadas por salientes y entrantes, tipo sierra, que no lo puede hacer el cubo. El color gris de la franja doble no lo tiene el cubo y en su lugar se ha puesto el color azul.

Bandera de Pakistán: Consta de dos franjas verticales, la estrecha de color blanco y la ancha de color verde. La salida es: b=V, f=B, d=R, i=N, t=A. La fórmula es /I/. La bandera sale en la cara b. El original tiene en la franja verde una media luna con una estrella de cinco puntas que no se puede hacer en el cubo.

3) **Banderas en forma de cruz de brazos cortos**

La expresión cruz de brazos cortos sólo se da en el cubo y no en las banderas como veremos después.

En el cubo la cruz la forman el C. C. (cubo central) y cuatro C. B. (cubos bordes); aparece rodeada de cuatro C. V. (cubos vértices) que pueden tener los cinco colores restantes del cubo.

En cada cara se forma una cruz de distinto color rodeada de C. V. que por poder tener cinco colores distintos formarán 6 x 5 = 30 cruces distintas de este tipo.

Todas estas cruces se pueden hacer en el cubo. Veamos algunos ejemplos:

Bandera de las Islas Feroes (1): La bandera está formada por una cruz de color rojo rodeada de color blanco. La salida es: b=R, f=B, d=Z, i=V, t=A. La fórmula es F^{-1} A^{-1} F/ FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. El brazo horizontal derecho de la cruz es más largo. En el cubo se forman cruces de brazos de igual longitud.

En la bandera hay dos cuadrados blancos y dos rectángulos blancos. En el cubo todos son cuadrados. En la bandera la cruz está rodeada de una línea que no se puede hacer en el cubo.

Bandera de Finlandia (1): La cruz es de color azul y las esquinas son blancas. La salida es: b=Z, f=B, d=N, i=R, t=A. La fórmula es F^{-1} A^{-1} F/ FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. En el original el azul es más claro que en el cubo. Dos cuadrados y dos rectángulos blancos rodean la bandera. En el cubo sólo hay cuadrados. El brazo horizontal derecho es más largo en la bandera.

Bandera de Islandia (1): La cruz es de color rojo y está rodeada de color azul. La salida es: b=R, f=Z, d=A, i=B, t=V. La fórmula es / F^{-1} A^{-1} F / FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. En el original la cruz está entre dos cuadrados y dos rectángulos; en el cubo sólo hay cuadrados rodeando la cruz. El brazo horizontal derecho de la bandera es más largo. El azul de la bandera es más claro.

Bandera de Noruega (1): La cruz es de color azul y está rodeada de color rojo. La salida es: b=Z, f=R, d=B, i=A, t=N. La fórmula es / F^{-1} A^{-1} F / FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. El color azul de la bandera es más claro que el del cubo. La cruz de la bandera tiene el brazo horizontal derecho más largo. Las cruces en el cubo tienen todos los brazos de igual longitud. La cruz de la bandera está rodeada de una línea blanca que no la puede hacer el cubo.

Bandera de Suecia (1): La cruz es de color amarillo y está rodeada de color azul. La salida es: b=A, f=Z, d=N, i=R, t=V. La fórmula es / F^{-1} A^{-1} F / FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. El azul de la bandera es más claro que el del cubo. La cruz amarilla está en la bandera rodeada de dos cuadrados y dos rectángulos; esto produce que el brazo horizontal derecho de la cruz sea más largo. Los brazos de la cruz en el cubo son iguales y ésta está rodeada de cuadrados.

Bandera de Suiza (1): La cruz es blanca y está rodeada de rojo. La salida es: b=B, f=R, d=V, i=Z, t=N. La fórmula es / F^{-1} A^{-1} F / FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. El original no se puede hacer en el cubo, pues no es posible rodear la cruz de rojo. En el cubo se hace sólo una aproximación.

Bandera de la Cruz Roja (1): La cruz es de color rojo y está rodeada de blanco. La posición de salida es: b=R, f=B, d=Z, i=V, t=A. La fórmula es F^{-1} A^{-1} F / FAF^{-1} / A / TAT^{-1} / IAI^{-1} /. La bandera sale en la cara b. En la bandera la cruz roja es pequeña y está rodeada totalmente de blanco. En el cubo la cruz tiene mayor tamaño y sólo las cuatro esquinas son blancas.

Estos tipos de banderas de cruces de brazos cortos admiten las siguientes *variaciones,* que podemos llamar banderines, estandartes, gallardetes o insignias.

Los cuatro C.V. de las esquinas pueden tener cinco colores distintos (sin contar el color de la cruz) que producirán las siguientes variaciones:

Con un C. V.:		
N.º 1		5 colores.
N.º 2		5 colores.
N.º 3		5 colores.
N.º 4		5 colores.
SUMA		20 variaciones.
Con dos C. V.:		
N.º 1 y 2	5 x 5 =	25 colores.
N.º 1 y 3	5 x 5 =	25 colores.
N.º 1 y 4	5 x 5 =	25 colores.
N.º 2 y 3	5 x 5 =	25 colores.
N.º 2 y 4	5 x 5 =	25 colores.
N.º 3 y 4	5 x 5 =	25 colores.
SUMA		= 150 variaciones.
Con tres C. V.:		
N.º 1, 2 y 3	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 1, 2 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 1, 3 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 2, 3 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
SUMA		= 500 variaciones.
Con cuatro C. V.:		
N.º 1, 2, 3 y 4	5 x 5 x 5 x 5 =	625 colores.

Suma de variaciones o banderines:
20 + 150 + 500 + 625 = 1.295

Más variaciones o banderines tendremos con *mutilaciones de la cruz*.

La cruz tiene cuatro ángulos y cada ángulo lo forman tres piezas, un C.C. y dos C.B. Como cada cara tiene nueve piezas nos quedan seis piezas que producirán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 15.625 variaciones.

Si tenemos en cuenta los cuatro ángulos de la cruz, producirán 15.625 x 4 = 62.500 variaciones.

Si ahora utilizamos dos ángulos, existen las siguientes posibilidades: 1 y 2, 1 y 4, 3 y 2, 3 y 4, es decir, cuatro (dos ángulos situados enfrente 1 y 3, 2 y 4 forman la cruz).

Cada una de estas cuatro posibilidades producen las siguientes variaciones: cada dos ángulos dejan cinco piezas libres (cuatro C.V. y un C.B.) que producirán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 3.125 variaciones. Los cuatro grupos producirán 3.125 x 4 = 12.500 variaciones. El resultado final será 30 + 1.295 + 62.500 + 12.500 = 76.325 entre cruces normales y variaciones. Todas estas banderas y banderines se pueden hacer en el cubo.

4) **Banderas en forma de cruces de brazos largos**

Está formada por las diagonales del cubo o del rectángulo. En el cubo la cruz que forman los C. C. (cubos centrales) y los cuatro C. V. (cubos vértices) aparece rodeada de cuatro C. B. (cubos bordes) que son cuadrados en el cubo y triángulos en la bandera.

En cada cara se forma una cruz de distinto color rodeada de C. B. que cada uno puede tener cinco colores distintos (excepto el color de la cruz). Así se pueden formar 6 x 5 = 30 cruces de este tipo.

Todas estas cruces se pueden hacer en el cubo. Veamos algunos ejemplos:

Bandera de Burundi (1, 2): Está formada por una cruz blanca y entre sus brazos hay colores rojos y verdes, opuestos respectivamente. La salida es: b=B, f=V, d=N, i=R, t=Z. La fórmula es TF^{-1} / $D^{-1}I$ / D^{-1} A^{-1} D / DAD^{-1} / A / IAI^{-1} / FAF^{-1} /. El original no se puede hacer por las siguientes razones: 1.º, en su centro hay un círculo; 2.º, en su interior hay tres estrellas de cinco puntas; y 3.º, en los lados del círculo hay cuatro triángulos con sus vértices cortados. No obstante estas dificultades insuperables en el cubo, la figura que se obtiene es semejante a una cruz de brazos largos que también se da en las banderas de Jamaica y Seychelles.

Banderas de este tipo se pueden formar varias por las combinaciones de colores que se pueden hacer.

Bandera de Jamaica (1): Está formada por una cruz de color amarillo y entre sus brazos aparecen colores verde y azul, opuestos respectivamente. La posición de salida es: b=A, f=R, d=Z, i=V, t=N. La fórmula es TF^{-1} / A / D^2I^2 / D^{-1} A^{-1} D / DAD^{-1} / A / I^{-1} A^{-1} I / T^{-1} A^{-1} T / A / T^{-1} A^{-1} T /.

En el original los colores azul y verde en piezas triangulares. Las diagonales amarillas son más estrechas. En el cubo las diagonales son más anchas. El color oscuro se ha puesto por azul en el cubo. Esta forma de cruz admite varias variaciones por el colorido de las piezas.

Bandera de Seychelles (2): La bandera está formada por una cruz de color blanco rodeada de colores azules y rojos, opuestos respectivamente.

La posición de salida es: b=B, f=R, d=V, i=Z, t=N. La fórmula es TF^{-1} / D^{-1} I / D^{-1} A^{-1} D / DAD^{-1} / A / IAI^{-1} / FAF^{-1} /.

El original tiene la cruz blanca más estrecha que la que produce el cubo. Admite varias formas por el colorido de las piezas.

Estos tipos de cruces de banderas de brazos largos admiten las siguientes *variaciones,* que podemos llamar banderines, estandartes, gallardetes o insignias.

Los cuatro C. B. pueden tener cinco colores distintos (sin contar el color de la cruz) que producirán las siguientes variaciones:

Con un C. B.:		
N.º 1		5 colores.
N.º 2		5 colores.
N.º 3		5 colores.
N.º 4		5 colores.
SUMA		20 variaciones.
Con dos C. B.:		
N.º 1 y 2	5 x 5 =	25 colores.
N.º 1 y 3	5 x 5 =	25 colores.
N.º 1 y 4	5 x 5 =	25 colores.
N.º 2 y 3	5 x 5 =	25 colores.
N.º 2 y 4	5 x 5 =	25 colores.
N.º 3 y 4	5 x 5 =	25 colores.
SUMA		= 150 variaciones.
Con tres C. B.:		
N.º 1, 2 y 3	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 1, 2 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 1, 3 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
N.º 2, 3 y 4	5 x 5 x 5 =	125 colores.
SUMA		= 500 variaciones.
Con cuatro C. B.:		
N.º 1, 2, 3 y 4	5 x 5 x 5 x 5 =	625 variaciones.

Suma de variaciones o banderines:
20 + 150 + 500 + 625 = 1.295

Más variaciones o banderines tendremos con *mutilaciones de la cruz.*

La cruz consta de cuatro ángulos y cada ángulo está formado por tres piezas, un C.C. y dos C.V., luego de las nueve piezas que tiene cada cara nos quedan seis piezas que producán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 15.625 variaciones distintas.

Si tenemos en cuenta los cuatro ángulos de la cruz, producirán 15.625 x 4 = 62.500 variaciones.

Si ahora utilizamos dos ángulos, existen las siguientes posibilidades: 1 y 2, 1 y 4, 3 y 2, 3 y 4, es decir, cuatro (dos ángulos situados enfrente 1 y 3, 2 y 4 forman la cruz).

Cada una de estas cuatro posibilidades producen las siguientes variaciones: como cada dos ángulos dejan cinco piezas libres (un C. V. y cuatro C. B.) producirán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 3.125 variaciones. Las cuatro posibilidades producirán 3.125 x 4 = 12.500 variaciones. El resultado final será 30 + 1.295 + 62.500 + 12.500 = 76.325 entre cruces normales y variaciones. Todas estas banderas, banderines y variaciones se pueden hacer en el cubo.

5) **Banderas en forma de diagonal**

Son las formadas por una de las dos diagonales del cubo rodeadas con piezas de otro color.

Como cada cara tiene una diagonal de este tipo que puede estar rodeada por piezas de cinco colores (además del color de la diagonal), se formarán 6 x 5 = 30 banderas de este tipo. Todas estas banderas se hacen fácilmente en el cubo. Veamos algunos ejemplos de ellas:

Bandera de Galicia: Está formada por una diagonal de color azul rodeada de piezas de color blanco.

Posición de salida: b=Z, f=B, d=N, i=R, t=A. La fórmula es ID^{-1} / FB / ID^{-1} / A^{-1} / FAF^{-1} / A^2 / D^{-1} A^{-1} D / IAI^{-1} / A^2 / F^{-1} A^{-1} F /. La bandera sale en la cara b. Sale correcta, original sin añadidos.

Bandera de Tanzania (1): La diagonal, distinta a la de Galicia, es de color negro con filos blancos. Al no poderse hacer en el cubo hacemos otra bandera de este tipo.

Diagonal de color rojo con piezas verdes en la parte superior y azules en la parte inferior. Posición de salida: b=R, f=V, d=B, i=A, t=Z.

La fórmula es ID / A / F^2 / T^2 / A^{-1} / DAD^{-1} / A / IAI^{-1} /.

Esta bandera, por tener colores distintos a uno y otro lado de la diagonal, admite las variaciones que permiten las distintas combinaciones de esos dos colores.

Ambos tipos de banderas admiten las siguientes *variaciones*. Teniendo cada diagonal sólo tres piezas quedan seis piezas libres que pueden originar 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 15.625 variaciones.

Más variaciones se producen por la *mutilación de la diagonal*. La mutilación deja la diagonal reducida a su mitad y como ésta sólo contiene dos piezas nos restan siete piezas que producirán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 78.125 variaciones. Las dos mitades de la diagonal producirán 78.125 x 2 = 156.250 variaciones.

El total de variaciones de este tipo de banderas son: 30 + 15.625 + 156.250 = 171.905 variaciones.

Como son dos diagonales, las variaciones que se obtendrán serán 171.905 x 2 = 343.810.

Todas estas banderas y variaciones se pueden hacer fácilmente en el cubo.

6) **Banderas de lunares**

Son las formadas por una pieza central de un color rodeada de piezas de otro color. Como cada cara tiene un color la pieza central de esa cara se rodea de piezas que pueden tener los cinco colores restantes del cubo con lo cual se pueden formar 6 x 5 = 30 banderas diferentes. Todas estas banderas se hacen fácilmente en el cubo.

Veamos algunos ejemplos:

Bandera de Oman Al-Sulh n.º 2 (3): La bandera está formada por la pieza central de color rojo rodeada de piezas de color blanco. La posición de salida es: a=R, f=B, d=V, i=Z, t=A. La fórmula es FT^{-1} / AB^{-1} / DI^{-1} / FT^{-1} /. La bandera sale en la cara a. Sale bien, original sin añadidos.

Bandera del Japón (1): Consta de un círculo central de color rojo rodeado de blanco. En el cubo sólo se pueden hacer cuadrados. Habría que pegar a la pieza central de la cara roja una pegatina redonda que la cubriese; así se puede hacer esta bandera empleando la misma fórmula que hemos indicado para la bandera de Omán.

Este tipo de banderas admite las siguientes *variaciones*. La pieza central está rodeada de ocho piezas que producirán 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 390.625 banderas. Entre banderas y variaciones tendremos 30 + 390.625 = 390.655. Todas estas banderas y variaciones se hacen fácilmente en el cubo.

Dado que cada cara del cubo tiene nueve piezas de las que ocho de ellas por giros de las caras pueden presentar seis colores distintos la *máxima variación posible* es la que producen el juego de estas ocho piezas es decir, 6 x 6 x 6 x 6 x 6 x 6 x 6 x 6 = 1.679.616 variaciones en cada cara.

Siendo seis las caras del cubo las máximas variaciones en todas ellas serán 1.679.616 x 6 = 10.077.696 variaciones.

Todas estas banderas, banderines y dibujos multicolores se hacen perfectamente en el cubo.

Este gran número de banderas, banderines, mutilaciones y dibujos múltiples incluyen en cada cara todas las banderas indicadas así como todas las variaciones y mutilaciones posibles.

En cada cara existe una sola posibilidad de que las nueve piezas tengan el mismo color que será el de la pieza C. C. (cubo central).

Todas estas banderas, banderines y dibujos multicolores se consiguen como hemos indicado: posición de salida y fórmula para obtenerlos.

La posición de salida se debe estudiar detenidamente para conseguir la bandera que se desea con el mínimo número de movimientos.

La fórmula se consigue fácilmente para todo el que tenga experiencia suficiente en el cubo.

El lector de este trabajo, si lo ha leído con atención, y tiene experiencia en el cubo, puede encontrar la fórmula cualquiera que sea la bandera que quiere producir.

Al investigador del cubo se le puede presentar el problema de hacer en el cubo, entre las banderas y variaciones indicadas, la que desea un solicitante.

Obtenida esta petición el investigador del cubo hace el dibujo de la bandera, variación o dibujo multicolor solicitado y empieza su trabajo: posición de salida y movimientos necesarios. El resultado será la fórmula para obtener la bandera o variación solicitada y con ella el solicitante podrá hacer la bandera o variación, con que sólo sepa realizar los movimientos de las caras que indica la fórmula obtenida.

En resumen, con la fórmula en la mano se puede hacer la bandera solicitada.

La fórmula para obtener la bandera o variación es más complicada, pero fácil para el que tenga experiencia en el manejo del cubo.

Las banderas indicadas se han tomado de las tres primeras publicaciones que indica la bibliografía. Toda variación de bandera en cualquier país de fecha posterior no aparece en las publicaciones. Tal es el caso de las banderas de las Autonomías de España.

NOTAS

(1) *Enciclopedia internacional Pal*, Edición Mensajero, 1973, t. 3.
(2) *Mundo Negro. Africa*, 1979.
(3) *Enciclopedia Larousse*, 3.ª edic., Planeta, 1977.
(4) Warusfel, A.: *El Cubo Mágico de Rubik*, Atalena. Madrid, 1981.
(5) RUIZ SANTAELLA, J.: «Grupos finitos extremos en el cubo de Rubik», X Jornadas Hispano-lusas de Matemáticas, Universidad de Murcia, enero 1985.
(6) RUIZ SANTAELLA, J.: «Grupos finitos en el cubo de Rubik», *Revista de la Sociedad Andaluza de profesores de Matemáticas. Thales*, 2 (1985), 106-121.