

## 7. Matrices, déterminants, polynômes caractéristiques - Exercices

Sauf mention contraire,  $E$  désigne un espace vectoriel sur un corps  $K$ .  $n$  est un entier naturel non nul.  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Algèbre des matrices

**E-7.1.** (5')\* Soient  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nul,  $\lambda = X^\top \overline{X}$ ,  $M = \lambda I_n - 2X(\overline{X})^\top$ ,  $A = \operatorname{Re}(M)$  et  $B = \operatorname{Im}(M)$ . Montrer que  $AB = -BA$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.2.** (5')\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $kA^{k+1} = (k+1)A^k$ . Montrer que  $A - I_n$  est inversible.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.3.** (5')\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Soit  $(A, B) \in \operatorname{GL}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K)$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  sont semblables.

(b) Donner un exemple de couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$  tel que  $AB$  et  $BA$  ne soient pas semblables.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.4.** (5')\* Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(K)^4$  telles que  $AB^\top$  et  $CD^\top$  soient symétriques, et  $AD^\top - BC^\top = I_n$ . Montrer que  $A^\top D - B^\top C = I_n$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.5.** (5')\* Déterminer  $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{M}_n(K), \forall M \in \mathcal{M}_n(K), AM = MA\}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.6.** (15')\*\* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = \{M \in \mathcal{M}_n(K), M^2 = I_2\}$ . Déterminer  $\operatorname{Vect}(A)$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.7.** (20')\*\*\* Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda A) = |\lambda| f(A).$$

(ii) Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

$$f(A+B) \leq f(A) + f(B).$$

(iii) Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

$$f(AB) = f(BA).$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.8.** (20')\*\*\* Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes.

(i) Il existe  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $AM + MA = B$ .

(ii) Pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(K)$ , si  $AX + XA = 0$ , alors  $\operatorname{Tr}(BX) = 0$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

### Représentations matricielles

**E-7.9.** (10')\* Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $\varphi(M) = aM + bM^\top$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que  $\varphi$  soit un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et déterminer la trace et le déterminant de  $\varphi$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.10.** (N')\*\* Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ,  $f$  et  $\varphi$  les endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(K)$  définis par  $f : M \mapsto AM$  et  $\varphi : M \mapsto MA + AM$ .

(a) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique. Donner le noyau, l'image, le rang, la trace et le déterminant de  $f$  en fonction de ceux de  $A$ .

(b) Déterminer la trace de  $\varphi$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.11.** (10')\*\* Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$  deux matrices non nulles vérifiant  $A^2 = B^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

(b) Est-ce toujours vrai dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ ?

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.12.** (15')\*\* *Transvections*. Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i)  $t \in \operatorname{GL}(E) \setminus \{\operatorname{id}_E\}$  et il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $t(x) = x$  pour tout  $x \in H$  et  $t(x) - x \in H$  pour tout  $x \in E$ .

(ii) Il existe  $\varphi \in E^*$  non nulle et  $a \in \operatorname{Ker} \varphi$  tels que pour tout  $x \in E$ ,  $t(x) = x + \varphi(x)a$ .

(iii) Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = I_n + E_{2,1}$ .

Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est appelé *transvection*.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.13.** (15')\*\* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 2,  $D_1, D_2, D_3$  trois droites vectorielles de  $E$  deux à deux distinctes, de même que  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{L}(E), u(D_i) \subset \Delta_i \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$  est une droite vectorielle de  $\mathcal{L}(E)$ .

(b) Dans le cas  $E = \mathbb{R}^2$ , trouver la forme générale des matrices canoniquement associées aux éléments de  $\mathcal{D}$  pour  $\Delta_1 : y = x$ ,  $\Delta_2 : y = 2x$ ,  $\Delta_3 : y = 3x$ ,  $D_1 : y = 0$ ,  $D_2 : x = 0$ ,  $D_3 : y = -x$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.14.** (15')\*\* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

(a) On note  $A = \{u \in \mathcal{L}(E), F \subset \text{Ker } u\}$  et  $B = \{u \in \mathcal{L}(E), \text{Im } u \subset F\}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E)$  et donner leurs dimensions.

(b) Déterminer la dimension de  $C = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$  en fonction de celles de  $F, G$  et  $F \cap G$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.15.** (20')\*\*\* Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux matrices carrées à coefficients dans  $K$  nilpotentes de tailles respectives  $p_1$  et  $p_2$ , et  $U_1$  et  $U_2$  deux matrices carrées inversibles de tailles respectives  $q_1$  et  $q_2$ , avec  $n = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$  soient semblables.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

### Rang, matrices équivalentes, opérations sur les rangées

**E-7.16.** (5')\* Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  tels que  $M = XY^T$  et calculer  $M^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.17.** (10')\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(a) Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $A$  est triangulaire inférieure si et seulement si  $A^k$  l'est pour tout  $k \geq 2$ .

(b) Donner un exemple de matrice non inversible et non triangulaire inférieure telle que  $A^k$  soit triangulaire inférieure pour tout  $k \geq 2$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.18.** (10')\*\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Déterminer la dimension du sous-espace  $E_A$  de  $\mathcal{M}_n(K)$  défini par

$$E_A = \{B \in \mathcal{M}_n(K), ABA = 0\}.$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.19.** (10')\*\*  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite *en damier* si  $a_{i,j} = 0$  dès que  $i + j$  est impair. On note  $\text{Dam}$  l'ensemble des matrices en damier de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

(a) Montrer que  $\text{Dam}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et déterminer sa dimension.

(b) Si  $A$  est inversible en damier,  $A^{-1}$  est-elle en damier?

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.20.** (10')\*\* Soient  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ . Montrer que

$$\text{rg } M = \inf\{k \in \mathbb{N}, \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(K) \times \mathcal{M}_{k,q}(K) \text{ telles que } M = AB\}.$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.21.** (10')\*\* Soit  $A$  une matrice (*a priori* rectangulaire) partitionnée en blocs  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\ell,1} & \dots & A_{\ell,k} \end{pmatrix}$  (on ne précise pas les dimensions, on impose seulement qu'elles soient compatibles).

(a) Montrer que  $\text{rg}(A) \leq \sum_{(i,j) \in [1,k] \times [1,\ell]} \text{rg}(A_{i,j})$ .

(b) *Application* : pour  $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ ,  $C \in \mathcal{M}_{m,n-p}(K)$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n-m,p}(K)$  et  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & 0 \end{pmatrix}$ , montrer que si  $A$  est inversible, alors  $\text{rg } B \geq m + p - n$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.22.** (20')\*\*\* Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  tel que  $\text{rg } A = \text{rg } B$  et  $A^2 B = A$ . Montrer que  $B^2 A = B$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.23.** (15')\*\*\* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

(a) Montrer que  $\dim \text{Ker}(u^2) \leq 2 \dim \text{Ker}(u)$ .

(b) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

(i)  $\dim \text{Ker}(u^2) = 2 \dim \text{Ker}(u)$ .

(ii)  $\text{Ker}(u) \subset \text{Im } u$ .

(iii)  $u(\text{Ker}(u^2)) = \text{Ker } u$ .

(c) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Montrer que  $\dim \text{Ker}(A^2) = 2 \dim \text{Ker}(A)$  si et seulement si  $\text{rg} \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

### Formes linéaires, équations de sous-espaces, systèmes linéaires

**E-7.24.** (10')\* *Transposée d'un endomorphisme.* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  rapporté à une base  $\mathcal{B}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . La *transposée de  $u$*  est l'application  $u^\top \in \mathcal{L}(E^*)$  définie pour tout  $\varphi \in E^*$  par  $u^\top(\varphi) = \varphi \circ u$ . Donner la matrice de  $u^\top$  dans la base  $\mathcal{B}^*$  des formes coordonnées associée à  $\mathcal{B}$ , en fonction de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.25.** (20')\*\*\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice de permutation si et seulement s'il existe  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  tel que  $P = (\delta_{i,\sigma(j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  : on note alors  $P = P_\sigma$ .  $E$  est l'ensemble des matrices  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  telles que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$\sum_{k=1}^n m_{i,k} = \sum_{k=1}^n m_{k,j}$  : pour  $M \in E$ , on note  $s(M)$  cette valeur commune. On définit encore  $E_0 = \{M \in E, s(M) = 0\}$ . On admet

(c'est immédiat) que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $E_0$  est un sous-espace de  $E$ .

(a) Donner la dimension de  $E_0$ , puis celle de  $E$ .

(b) Montrer que  $E = \text{Vect}((P_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n})$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.26.** (20')\*\*\* Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  un sous-espace de  $E$ . On pose

$$A^\circ = \{\varphi \in E^*, \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A\}$$

qui est de façon immédiate un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . Montrer que  $\dim A + \dim A^\circ = n$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

### Déterminants

**E-7.27.** (10')\* Soit  $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ , avec  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ .

(a) Montrer que  $\det(M) = \det(A + iB) \det(A - iB)$ .

(b) En déduire que si  $A$  et  $B$  sont à coefficients réels, alors  $\det M \geq 0$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.28.** (10')\* *Les classiques des déterminants par blocs.* Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(K)^4$ , avec  $D$  inversible.

(a) Montrer que si  $C$  et  $D$  commutent, alors le déterminant par blocs  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$  vérifie

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

(b) Montrer que si  $CD^\top$  est symétrique, alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD^\top - BC^\top).$$

(c) Montrer, en toute généralité, que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - B(D^{-1}CD)).$$

(d) (Pour les 5/2) Comment s'affranchir de l'hypothèse d'inversibilité de  $D$  dans (a) et (b) lorsque  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ?

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.29.** (10')\*\* Soit  $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{C}[X]^{n^2}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on suppose que  $A(z) = (P_{i,j}(z))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que les coefficients de  $A(z)^{-1}$  sont des polynômes en  $z$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.30.** (5')\*\* Soient  $n \geq 2$ ,  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On découpe  $M$  par blocs sous la forme  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ , les autres étant de tailles compatibles, et on fait de même pour  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\det(A) = \det(M) \det(D')$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.31.** (20')\*\* Soit  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $m_{i,i} = \lambda_i$ ,  $m_{i,j} = a$  si  $i < j$  et  $m_{i,j} = b$  si  $i > j$ . Calculer

$$D_n(a, b) = \det M.$$

On pourra commencer par le cas  $a \neq b$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.32.** (15')\*\* Soient  $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $A = (a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$  où  $a_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

(a) Déterminer la valeur de  $\det(A)$  et le rang de  $A$ .

(b) Montrer que  $|\det A| \leq n!$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.33.** (10')\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in K^{2n}$ . Calculer  $\det(m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où  $m_{i,j} = b_i$  si  $i \neq j$  et  $m_{i,i} = a_i + b_i$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.34.** (15')\*\* Soit  $(A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  où  $X$  est une matrice de rang 1. Montrer que  $\det(A+X) \det(A-X) \leq \det(A)^2$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.35.** (15')\*\* *Formule de Cauchy-Binet.* Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,  $n \leq p$ . Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et une partie  $S \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  de cardinal  $n$ , on note  $A^S$  la matrice de taille  $n \times n$  obtenue en extrayant de  $A$  ses colonnes d'indices appartenant à  $S$ . De même, pour une matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$  et une partie  $S \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  de cardinal  $n$ , on note  $B_S$  la matrice de taille  $n \times n$  obtenue en extrayant de  $B$  ses lignes d'indices appartenant à  $S$ . Montrer alors que

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \det(A^S) \det(B_S).$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.36.** (20')\*\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in K^{2n}$ . Calculer  $\det M$  où  $M = ((a_i + b_j)^{n-1})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.37.** (15')\*\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Montrer que  $D = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \in \mathbb{Z}$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.38.** (20')\*\*\* *Déterminant de Cauchy.* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}$  vérifiant  $a_i + b_j \neq 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Calculer

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.39.** (30')\*\*\* Déterminer toutes les matrices  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

### Calculs de polynômes caractéristiques

**E-7.40.** (20')\*\* Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  où  $a_{i,j} = 1$  si  $|i - j| = 1$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon. On note  $P_n$  son polynôme caractéristique.

(a) Former une relation de récurrence entre  $P_{n+2}$ ,  $P_{n+1}$  et  $P_n$ .

(b) Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et donner ses valeurs propres.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-7.41.** (20')\*\*\* Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Soit  $V \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que si  $AV$  est à coefficients positifs ou nuls, alors  $V$  également.

(b) Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1}$  est à coefficients positifs.

(c) Donner les valeurs propres de  $A$ .

**Énoncé détaillé – Corrigé**

## 7. Matrices, déterminants, polynômes caractéristiques - Exercices (énoncés détaillés)

Sauf mention contraire,  $E$  désigne un espace vectoriel sur un corps  $K$ .  $n$  est un entier naturel non nul.  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Algèbre des matrices

**E-7.1.** (5')\* Soient  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nul,  $\lambda = X^T \overline{X}$ ,  $M = \lambda I_n - 2X(\overline{X})^T$ ,  $A = \operatorname{Re}(M)$  et  $B = \operatorname{Im}(M)$ . Montrer que  $i(AB+BA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et en déduire que  $AB = -BA$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.2.** (5')\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $kA^{k+1} = (k+1)A^k$ . Montrer que  $A - I_n$  est inversible en explicitant son inverse.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.3.** (5')\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Soit  $(A, B) \in \operatorname{GL}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K)$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  sont semblables en explicitant une matrice inversible effectuant la similitude.

(b) Donner un exemple de couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$  tel que  $AB$  et  $BA$  ne soient pas semblables. On s'arrangera pour que l'un des deux produits seulement soit nul.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.4.** (5')\* Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(K)^4$  telles que  $AB^T$  et  $CD^T$  soient symétriques, et  $AD^T - BC^T = I_n$ .

(a) Montrer que la matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est inversible, en explicitant son inverse.

(b) Montrer que  $A^T D - B^T C = I_n$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.5.** (5')\* Montrer que  $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{M}_n(K), \forall M \in \mathcal{M}_n(K), AM = MA\} = \operatorname{Vect}(I_n)$ . On exploitera le fait qu'un élément de  $\mathcal{Z}$  commute avec les vecteurs de la base canonique.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.6.** (15')\*\* Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = \{M \in \mathcal{M}_n(K), M^2 = I_2\}$ .

(a) Montrer que  $\operatorname{Vect}(A)$  contient toutes les matrices de projection.

(b) Montrer que  $\operatorname{Vect}(A) = \mathcal{M}_n(K)$  en considérant la base canonique de  $\mathcal{M}_n(K)$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.7.** (20')\*\*\* Le but de cet exercice est de déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda A) = |\lambda| f(A).$$

(ii) Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

$$f(A+B) \leq f(A) + f(B).$$

(iii) Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

$$f(AB) = f(BA).$$

(a) Montrer qu'une telle application  $f$  est constante sur les classes de similitude.

(b) Étudier l'image par  $f$  des vecteurs de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(K)$ .

(c) Montrer que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $f(B) = 0 \Rightarrow f(A+B) = f(A)$ .

(d) Montrer que l'image par  $A$  de toute matrice de trace nulle est nulle. En déduire enfin qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f = \alpha |\operatorname{Tr}|$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.8.** (20')\*\*\* Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ .

(a) On suppose qu'il existe  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $AM + MA = B$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(K)$  tel que  $AX + XA = 0$ , on a  $\operatorname{Tr}(BX) = 0$ .

(b) On suppose réciproquement que pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(K)$ , si  $AX + XA = 0$ , alors  $\operatorname{Tr}(BX) = 0$ . Soient

$$\varphi : X \mapsto AX + XA \quad \text{et} \quad \psi : X \mapsto \operatorname{Tr}(BX).$$

En utilisant la factorisation à travers le noyau (voir TD 6) et les propriétés des formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(K)$  (voir TD 7), montrer qu'il existe  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $AM + MA = B$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

## Représentations matricielles

**E-7.9.**  $(10')^*$  Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $\varphi(M) = aM + bM^\top$ . En écrivant la matrice de  $\varphi$  dans une base adaptée à une décomposition de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en sous-espaces supplémentaires bien choisis, donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que  $\varphi$  soit un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$  et déterminer la trace et le déterminant de  $\varphi$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.10.**  $(N')^{**}$  Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ,  $f$  et  $\varphi$  les endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(K)$  définis par  $f : M \mapsto AM$  et  $\varphi : M \mapsto MA + AM$ .

(a) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique. On ordonnera cette dernière de façon à obtenir une forme par blocs particulièrement simple. Donner le noyau, l'image, le rang, la trace et le déterminant de  $f$  en fonction de ceux de  $A$ .

(b) Déterminer la matrice dans la base canonique de  $g : M \mapsto AM$ . En déduire la trace de  $\varphi$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.11.**  $(10')^{**}$  Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$  deux matrices non nulles vérifiant  $A^2 = B^2 = 0$ .

(a) En raisonnant en termes d'endomorphismes, montrer que  $A$  et  $B$  sont toutes deux semblables à la matrice  $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Construire dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  deux matrices  $A$  et  $B$  vérifiant  $A^2 = B^2 = 0$  mais non semblables.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.12.**  $(15')^{**}$  *Transvections.* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathcal{L}(E)$ . Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i)  $t \in \text{GL}(E) \setminus \{\text{id}_E\}$  et il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $t(x) = x$  pour tout  $x \in H$  et  $t(x) - x \in H$  pour tout  $x \in E$ .

(ii) Il existe  $\varphi \in E^*$  non nulle et  $a \in \text{Ker } \varphi$  tels que pour tout  $x \in E$ ,  $t(x) = x + \varphi(x)a$ .

(iii) Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = I_n + E_{2,1}$ .

(a) On suppose (i). Montrer que  $u : x \mapsto t(x) - x$  est de rang 1, et en déduire (ii).

(b) On suppose (ii). Montrer qu'il existe  $e_1 \in E$  tel que  $\varphi(e_1) = 1$ , et en déduire (iii).

(c) Montrer enfin (iii)  $\Rightarrow$  (i).

Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est appelé *transvection*.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.13.**  $(15')^{**}$  Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 2,  $D_1, D_2, D_3$  trois droites vectorielles de  $E$  deux à deux distinctes, de même que  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{L}(E), u(D_i) \subset \Delta_i \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$  est une droite vectorielle de  $\mathcal{L}(E)$ . On pourra considérer deux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $E$ , respectivement adaptées aux décompositions  $E = D_1 \oplus D_2 = \Delta_1 \oplus \Delta_2$

(b) Dans le cas  $E = \mathbb{R}^2$ , trouver la forme générale des matrices canoniquement associées aux éléments de  $\mathcal{D}$  pour  $\Delta_1 : y = x$ ,  $\Delta_2 : y = 2x$ ,  $\Delta_3 : y = 3x$ ,  $D_1 : y = 0$ ,  $D_2 : x = 0$ ,  $D_3 : y = -x$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.14.**  $(15')^{**}$  Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

(a) On note  $A = \{u \in \mathcal{L}(E), F \subset \text{Ker } u\}$  et  $B = \{u \in \mathcal{L}(E), \text{Im } u \subset F\}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E)$ . En considérant une base de  $E$  adaptée à  $F$ , donner la forme des matrices d'éléments de  $A$  et  $B$  dans cette base, et en déduire leurs dimensions.

(b) En considérant une base de  $E$  adaptée à  $F \cap G$  et en la complétant judicieusement, déterminer la dimension de  $C = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$  en fonction de celles de  $F$ ,  $G$  et  $F \cap G$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.15.**  $(20')^{***}$  Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux matrices carrées à coefficients dans  $K$  nilpotentes de tailles respectives  $p_1$  et  $p_2$ , et  $U_1$  et  $U_2$  deux matrices carrées inversibles de tailles respectives  $q_1$  et  $q_2$ , avec  $n = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ . On pose  $M_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$  et

$$M_2 = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que si  $N_1$  et  $N_2$  d'une part,  $U_1$  et  $U_2$  d'autre part, sont de même taille et semblables, alors  $M_1$  et  $M_2$  sont semblables.

(b) On suppose réciproquement  $M_1$  et  $M_2$  semblables, et on note  $u$  un endomorphisme de  $K^n$  ayant pour matrices  $M_1$  et  $M_2$  dans des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement. En établissant un lien avec les suites des noyaux et images itérés de  $u$  (voir TD), montrer la réciproque de la question précédente.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

## Rang, matrices équivalentes, opérations sur les rangées

**E-7.16.**  $(5')^*$  Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice de rang 1.

(a) En considérant un vecteur colonne non nul  $X$  de  $M$ , montrer qu'il existe un second vecteur colonne tel que  $M = XY^\top$ .

(b) Montrer que  $Y^\top X = \text{Tr}(M)$  puis calculer  $M^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.17.** (10')\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(a) Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $A$  est triangulaire inférieure si et seulement si  $A^k$  l'est pour tout  $k \geq 2$ . On pourra utiliser le fait (voir cours) que l'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.

(b) Donner un exemple de matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  non inversible et non triangulaire inférieure telle que  $A^k$  soit triangulaire inférieure pour tout  $k \geq 2$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.18.** (10')\*\* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Déterminer la dimension du sous-espace  $E_A$  de  $\mathcal{M}_n(K)$  défini par

$$E_A = \{B \in \mathcal{M}_n(K), ABA = 0\}.$$

On commencera par étudier le cas où  $A$  est de la forme par blocs  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $r \in \mathbb{N}^*$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.19.** (10')\*\*  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite *en damier* si  $a_{i,j} = 0$  dès que  $i + j$  est impair. On note  $\text{Dam}$  l'ensemble des matrices en damier de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

(a) Montrer que  $\text{Dam}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et déterminer sa dimension.

(b) En effectuant des opérations sur les lignes et les colonnes, montrer que si  $A$  est inversible et en damier, alors  $A^{-1}$  est également en damier.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.20.** (10')\*\* Soient  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ . On note  $r = \text{rg } M$  et

$$d = \inf\{k \in \mathbb{N}, \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(K) \times \mathcal{M}_{k,q}(K) \text{ telles que } M = AB\}.$$

(a) Montrer que  $r \leq d$ .

(b) En considérant d'abord le cas où  $M$  est de la forme par blocs  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , montrer que  $d \leq r$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.21.** (10')\*\* Soit  $A$  une matrice (*a priori* rectangulaire) partitionnée en blocs  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\ell,1} & \dots & A_{\ell,k} \end{pmatrix}$  (on ne précise pas les dimensions, on impose seulement qu'elles soient compatibles).

(a) On pose  $C_j = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{\ell,j} \end{pmatrix}$  pour  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Montrer que  $\text{rg}(A) \leq \sum_{j=1}^k \text{rg}(C_j)$ , puis que  $\text{rg}(A) \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, \ell \rrbracket} \text{rg}(A_{i,j})$ .

(b) *Application* : pour  $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ ,  $C \in \mathcal{M}_{m,n-p}(K)$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n-m,p}(K)$  et  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & 0 \end{pmatrix}$ , montrer que si  $A$  est inversible, alors  $\text{rg } B \geq m + p - n$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.22.** (20')\*\*\* Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  telles que  $r = \text{rg } A = \text{rg } B$  et  $A^2 B = A$ . On introduit les endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ .

(a) Montrer que si  $r = n$ , alors  $B^2 A = B$ .

(b) On ne suppose plus  $r = n$ . Montrer que  $\text{Ker } a = \text{Ker } b$ , puis que  $B^2 A = B$  en écrivant les matrices de  $a$  et  $b$  dans une base bien choisie.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.23.** (15')\*\*\* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

(a) Montrer que  $\dim \text{Ker}(u^2) \leq 2 \dim \text{Ker}(u)$  en considérant la restriction de  $u$  à  $\text{Ker } u^2$ .

(b) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

(i)  $\dim \text{Ker}(u^2) = 2 \dim \text{Ker}(u)$ .

(ii)  $\text{Ker}(u) \subset \text{Im } u$ .

(iii)  $u(\text{Ker}(u^2)) = \text{Ker } u$ .

On montrera précisément (i)  $\iff$  (iii), (i)  $\implies$  (ii) et (ii)  $\implies$  (iii).

(c) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Montrer que  $\dim \text{Ker}(A^2) = 2 \dim \text{Ker}(A)$  si et seulement si  $\text{rg } M = \text{rg } N$  où l'on a noté  $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ . On pourra exhiber des isomorphismes explicites de  $(\text{Ker } A)^2$  sur  $\text{Ker } N$  et de  $\text{Ker}(A^2)$  sur  $\text{Ker } M$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**



## Formes linéaires, équations de sous-espaces, systèmes linéaires

**E-7.24.** (10')\* *Transposée d'un endomorphisme.* Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  rapporté à une base  $\mathcal{B}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . La transposée de  $u$  est l'application  $u^\top \in \mathcal{L}(E^*)$  définie pour tout  $\varphi \in E^*$  par  $u^\top(\varphi) = \varphi \circ u$ . Montrer que la matrice de  $u^\top$  dans la base  $\mathcal{B}^*$  des formes coordonnées associée à  $\mathcal{B}$  est la transposée de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.25.** (20')\*\*\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice de permutation si et seulement s'il existe  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  tel que  $P = (\delta_{i,\sigma(j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  : on note alors  $P = P_\sigma$ .  $E$  est l'ensemble des matrices  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  telles que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\sum_{k=1}^n m_{i,k} = \sum_{k=1}^n m_{k,j}$  : pour  $M \in E$ , on note  $s(M)$  cette valeur commune. On définit encore  $E_0 = \{M \in E, s(M) = 0\}$ . On admet (c'est immédiat) que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $E_0$  est un sous-espace de  $E$ .

(a) Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\varphi_i : M \mapsto \sum_{k=1}^n m_{i,k}$  et  $\psi_i : M \mapsto \sum_{k=1}^n m_{k,i}$ . Montrer que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$  est de rang  $2n - 1$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ . En déduire la dimension de  $E_0$ , puis celle de  $E$ .

(b) Montrer que  $E = \text{Vect}((P_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n})$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.26.** (20')\*\*\* Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  un sous-espace de  $E$ . On pose

$$A^\circ = \{\varphi \in E^*, \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A\}$$

qui est de façon immédiate un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . Montrer que  $\dim A + \dim A^\circ = n$ . On pourra introduire une base de  $A$ , la compléter, considérer la base des formes coordonnées associée, et la compléter à son tour.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

## Déterminants

**E-7.27.** (10')\* Soit  $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ , avec  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ .

(a) À l'aide d'opérations par blocs sur les rangées (s'assurer de leur légalité), montrer que  $\det(M) = \det(A + iB) \det(A - iB)$ . On remarquera que  $i$  ne peut pas apparaître tout seul...

(b) En déduire que si  $A$  et  $B$  sont à coefficients réels, alors  $\det M \geq 0$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.28.** (10')\* *Les classiques des déterminants par blocs.* Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(K)^4$ , avec  $D$  inversible.

(a) À l'aide du calcul par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ , montrer que si  $C$  et  $D$  commutent, alors le déterminant par blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \text{ vérifie}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

(b) Montrer que si  $CD^\top$  est symétrique, alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD^\top - BC^\top).$$

(c) Montrer, en toute généralité, que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - B(D^{-1}CD)).$$

(d) (Pour les 5/2) Comment s'affranchir de l'hypothèse d'inversibilité de  $D$  dans (a) et (b) lorsque  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ?

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.29.** (10')\*\* Soit  $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{C}[X]^{n^2}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on suppose que  $A(z) = (P_{i,j}(z))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

(a) Montrer que  $\det(A(z))$  est indépendant de  $z$ .

(b) En déduire que les coefficients de  $A(z)^{-1}$  sont des polynômes en  $z$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.30.** (5')\*\* Soient  $n \geq 2$ ,  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On découpe  $M$  par blocs sous la forme  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ , les autres étant de tailles compatibles, et on fait de même pour  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ .

(b) Montrer que  $\det(A) = \det(M) \det(D')$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.31.** (20')\*\*  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$  étant fixés, on pose pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$D_n(a, b) = \det M$$

avec  $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $m_{i,i} = \lambda_i$ ,  $m_{i,j} = a$  si  $i < j$  et  $m_{i,j} = b$  si  $i > j$ .

(a) Calculer  $D_n(a, b)$  pour  $a \neq b$ . On pourra considérer  $P : x \mapsto \det(M + xJ)$ , où  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  a tous ses coefficients égaux à 1.

(b) Calculer  $D_n(a, a)$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.32.** (15')\*\* Soient  $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $A = (a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$  où  $a_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

(a) Déterminer la valeur de  $\det(A)$  et le rang de  $A$ . On pourra introduire les polynômes de Tchebychev.

(b) Montrer que  $|\det A| \leq n!$ . Un conseil : oubliez la première question!

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.33.** (10')\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in K^{2n}$ . En exploitant la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes, calculer  $\det(m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où  $m_{i,j} = b_i$  si  $i \neq j$  et  $m_{i,i} = a_i + b_i$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.34.** (15')\*\* Soit  $(A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  où  $X$  est une matrice de rang 1. En utilisant un résultat d'équivalence matricielle et la multilinéarité du déterminant, montrer que  $\det(A+X) \det(A-X) \leq \det(A)^2$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.35.** (15')\*\* *Formule de Cauchy-Binet.* Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $n \leq p$ . Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et une partie  $S \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  de cardinal  $n$ , on note  $A^S$  la matrice de taille  $n \times n$  obtenue en extrayant de  $A$  ses colonnes d'indices appartenant à  $S$ . De même, pour une matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$  et une partie  $S \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  de cardinal  $n$ , on note  $B_S$  la matrice de taille  $n \times n$  obtenue en extrayant de  $B$  ses lignes d'indices appartenant à  $S$ . Montrer alors que

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{O}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \det(A^S) \det(B_S).$$

On pourra décomposer  $AB$  selon ses colonnes et exploiter la multilinéarité du déterminant en regroupant judicieusement les termes.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.36.** (20')\*\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in K^{2n}$ . Calculer  $\det M$  où  $M = ((a_i + b_j)^{n-1})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ . On pourra utiliser le binôme de Newton et écrire  $M$  comme le produit de deux matrices « à peu près » de Vandermonde.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.37.** (15')\*\*\* Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Montrer que  $D = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \in \mathbb{Z}$ . On montrera qu'on peut se ramener au cas  $n \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ , puis interpréter la quantité donnée comme le déterminant d'une matrice à coefficients entiers.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.38.** (20')\*\*\* *Déterminant de Cauchy.* Soit  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}$  vérifiant  $a_i + b_j \neq 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Calculer

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

On pourra commencer par retrancher la dernière ligne à toutes les autres, puis retrancher la dernière colonne à toutes les autres dans le résultat obtenu.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.39.** (30')\*\*\* Pour  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose

$$P(A) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

On note aussi  $\mathcal{F}_n = \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$  l'ensemble de toutes les applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même.

(a) Montrer que si  $|\det(A)| = P(A)$ , alors  $\prod_{i=1}^n |a_{i,f(i)}| = 0$  pour tout  $f \in \mathcal{F}_n$  non bijective.

(a) Montrer que  $|\det(A)| = P(A)$  si et seulement si  $A$  possède au moins une ligne nulle, ou exactement un terme non nul par ligne et par colonne.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

### Calculs de polynômes caractéristiques

**E-7.40.** (20')\*\* Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  où  $a_{i,j} = 1$  si  $|i - j| = 1$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon. On note  $P_n$  son polynôme caractéristique.

(a) Montrer que  $P_{n+2} - XP_{n+1} + P_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Expliciter  $P_n(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  fixé et en déduire que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Donner ses valeurs propres.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-7.41.** (20')\*\*\* Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

(a) Soit  $V \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que si  $AV$  est à coefficients positifs ou nuls, alors  $V$  également. On s'intéressera à l'indice où se situe le minimum des coefficients de  $V$ .

(b) Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1}$  est à coefficients positifs.

(c) Montrer que le polynôme caractéristique  $\chi_n$  de  $A$  vérifie la récurrence  $\chi_n = (X - 2)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}$ . Établir un lien avec les polynômes de Tchebychev, et en déduire les valeurs propres de  $A$ .

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

## 7. Matrices, déterminants, polynômes caractéristiques - Exercices (corrigés)

### Algèbre des matrices

**E-7.1.** On a  $\lambda \in \mathbb{R}$  et

$$M^2 = \lambda^2 I_n = A^2 - B^2 + i(AB + BA)$$

d'où  $i(AB + BA) = \lambda^2 I_n - A^2 + B^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : elle est donc nulle.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-7.2.** On a

$$k(A - I_n)A^k - A^k = 0 \iff k(A - I_n)A^k - (A^k - I_n) = I_n$$

d'où ( $A$  et  $I_n$  commutent)

$$(A - I_n) \left( kA^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell \right) = I_n$$

ce qui montre que  $A - I_n$  est inversible et  $(A - I_n)^{-1} = kA^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$ .

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-7.3.** (a) On a immédiatement

$$AB = A(BA)A^{-1}.$$

(b) Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  vérifient  $AB = 0$  et  $BA = A$  qui ne sont donc pas semblables puisque  $A \neq 0$ .

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-7.4.** Remarquons qu'en transposant la dernière relation, on a aussi  $DA^\top - CB^\top = I_n$ . On a alors le produit par blocs dans  $\mathcal{M}_{2n}(K)$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^\top & -B^\top \\ -C^\top & A^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^\top - BC^\top & -AB^\top + BA^\top \\ CD^\top - DC^\top & -CB^\top + DA^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

si bien que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} D^\top & -B^\top \\ -C^\top & A^\top \end{pmatrix}$  sont inversibles, inverses l'une de l'autre. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} D^\top & -B^\top \\ -C^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I_{2n}$$

et le bloc en haut à gauche fournit bien  $D^\top A - B^\top C = I_n$ .

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-7.5.** Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{Z}$ . On note  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(K)$  : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a  $A = \sum_{(k,\ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$

d'où pour  $i \neq j$

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A \iff \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} E_{i,\ell}$$

ce qui impose  $a_{i,i} = a_{j,j}$  et  $a_{i,j} = a_{j,i} = 0$ . On en déduit que  $A$  est scalaire, la réciproque étant immédiate.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-7.6.** Notons tout d'abord que  $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A)$  où

$$B = \{M \in \mathcal{M}_n(K), M^2 = M\}.$$

En effet, si  $M \in B$ , on sait (c'est immédiat en interprétant les éléments de  $A$  et  $B$  comme des matrices de symétrie et de projection respectivement) que  $S = 2M - I_n \in A$  et comme  $I_n \in A$ , on a donc

$$M = \frac{S + I_n}{2} \in \text{Vect}(A).$$

On a ainsi  $B \subset \text{Vect}(A)$  et donc  $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A)$ .

On note alors  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(K)$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_{i,i} \in B$ . Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$ , on vérifie que

$$M_{i,j} = \frac{1}{2}(E_{i,i} + E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) \in B$$

et de même

$$N_{i,j} = \frac{1}{3}(E_{i,i} + 2E_{j,j} + 2E_{i,j} + E_{j,i}) \in B$$

si bien que  $2M_{i,j} - 3N_{i,j} + E_{j,j} = -E_{i,j} \in B$  et  $E_{j,i} = 2M_{i,j} - E_{i,i} - E_{j,j} - E_{i,j} \in B$  et donc  $\text{Vect}(B)$  contient toute la base canonique de  $\mathcal{M}_n(K)$ . Il en découle que  $\text{Vect}(B) = \mathcal{M}_n(K)$ , et finalement  $\text{Vect}(A) = \mathcal{M}_n(K)$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.7.** Montrons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f = \alpha |\text{Tr}|$ . Remarquons déjà que  $f(0) = f(0I_n) = |0|f(I_n) = 0$ .

\*  $f$  est constante sur les classes de similitude : pour tout  $(M, P) \in \mathcal{M}_n(K) \times \text{GL}_n(K)$ ,  $f(PMP^{-1}) = f(P^{-1}PM) = f(M)$ .

\* Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $E_{i,i}$  et  $E_{j,j}$  sont semblables : on note  $c$  la valeur commune des  $f(E_{i,i})$ . De plus, si  $i \neq j$ , on a

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0.$$

\* Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$  : si  $f(B) = 0$ , alors

$$f(A+B) \leq f(A) + f(B) = f(A)$$

et

$$f(A) = f(A+B-B) \leq f(A+B) + f(B) = f(A+B)$$

d'où  $f(A+B) = f(A)$ .

\* Si  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  vérifie  $\text{Tr}(A) = 0$ , alors  $A$  est semblable à une matrice de diagonale nulle (voir TD), donc combinaison linéaire de  $E_{i,j}$  avec  $i \neq j$ , d'où  $f(A) = 0$  avec le point précédent.

\* Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ,  $A = A - \text{Tr}(A)I_n + \text{Tr}(A)I_n$  donc

$$f(A) = f(A - \text{Tr}(A)I_n + \text{Tr}(A)I_n) = f(\text{Tr}(A)I_n) = |\text{Tr}(A)|f(I_n)$$

ce qui conclut avec  $\alpha = \text{Tr}(I_n)$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.8.** Supposons (i), et soit  $X \in \mathcal{M}_n(K)$  tel que  $AX + XA = 0$ . Alors

$$\text{Tr}(BX) = \text{Tr}(AMX + MAX) = \text{Tr}(AMX) + \text{Tr}(MAX) = \text{Tr}(XAM) + \text{Tr}(AXM) = \text{Tr}((XA + AX)M) = 0.$$

Supposons (ii). Si  $\varphi : X \mapsto AX + XA$  et  $\psi : X \mapsto \text{Tr}(BX)$ , on a donc  $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$  : il existe donc  $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K), K)$  telle que  $\psi = h \circ \varphi$  (voir TD sur les espaces vectoriels) et comme  $h$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(K)$ , il existe une unique  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $h : X \mapsto \text{Tr}(MX)$  (voir le TD sur les matrices). On en déduit que pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\text{Tr}(BX) = \text{Tr}(M(AX + XA)) = \text{Tr}((AM + MA)X)$$

et par l'unicité évoquée ci-dessus,  $B = AM + MA$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

## Représentations matricielles

**E-7.9.** On considère une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_n(K)$  formée de la réunion d'une base de  $\mathcal{S}_n(K)$  et d'une base de  $\mathcal{A}_n(K)$ . La matrice de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$  est alors la matrice diagonale écrite par blocs  $\begin{pmatrix} (a+b)I_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ 0 & (a-b)I_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix}$ . On en déduit aussitôt que

$$\text{Tr}(\varphi) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = n^2 a - nb$$

et

$$\det(\varphi) = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

puis que  $\varphi$  est un automorphisme si et seulement si  $a \neq b$  et  $a \neq -b$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.10.** En notant  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , on a  $AE_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$ . Si l'on ordonne la base  $\mathcal{B}$  de la façon suivante :  $(E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$ ,

la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est alors la matrice diagonale par blocs  $\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$ .

On obtient directement  $\text{Tr}(f) = n \text{Tr}(A)$  et  $\det(f) = \det(A)^n$  par un calcul par blocs. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$ , de colonnes  $(C_1, \dots, C_n)$ . Alors  $AM$  est la matrice de colonnes  $(AC_1, \dots, AC_n)$  et est donc nulle si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  sont dans  $\text{Ker } A$ .

\* Si  $A \in \text{GL}_n(K)$ , alors  $f \in \text{GL}(\mathcal{M}_n(K))$  (et sa réciproque est trivialement  $M \mapsto A^{-1}M$ ).

\* Si  $A = 0$ ,  $f = 0$  et tout est évident.

\* Sinon, on note  $r = \text{rg } A \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $(U_1, \dots, U_{n-r})$  une base de  $\text{Ker } A$ . Une base de  $\text{Ker } f$  est alors donnée par la famille des matrices de  $\mathcal{M}_n(K)$  dont l'une des colonnes est l'un des  $U_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et les autres colonnes sont nulles. Il vient  $\dim \text{Ker } f =$

$n(n-r)$ . On a alors  $\text{rg } f = nr$  par le théorème du rang, et une base de  $\text{Im } f$  est donnée par la même construction que celle ci-dessus à partir d'une base  $(V_1, \dots, V_r)$  de  $\text{Im } A$ .

(c) Soit  $g : M \rightarrow MA$ . En ordonnant cette fois  $\mathcal{B}$  selon  $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots)$ , la matrice de  $g$  est

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A^T \end{pmatrix}.$$

Par linéarité de la trace

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(f + g) = \text{Tr}(f) + \text{Tr}(g) = 2n \text{Tr}(A).$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.11.** (a) Soient  $u$  et  $v$  les endomorphismes de  $\mathbb{C}^3$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ . On a donc  $u^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ , donc  $\text{rg } u \leq \dim \text{Ker } u$ . Comme  $u \neq 0$ ,  $\text{rg } u \geq 1$ , et comme  $\dim \text{Ker } u + \text{rg } u = 3$  par le théorème du rang, on a nécessairement  $\text{rg } u = 1$ . Soit  $e_1$  un vecteur directeur de  $\text{Im } u$ ,  $e_3$  un antécédent de  $e_1$  (qui n'est donc pas dans  $\text{Ker } u$ ) et enfin  $e_2$  tel que  $(e_1, e_2)$

forme une base de  $\text{Ker } u$ , et donc  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  forme une base de  $\mathbb{C}^3$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La même construction étant possible pour  $v$ ,  $A$  et  $B$  sont semblables à  $M$ , donc semblables entre elles.

(b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  vérifient  $A^2 = B^2 = 0$  mais ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.12.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : soit  $u : x \mapsto t(x) - x$ .  $u$  n'est pas nul et  $H \subset \text{Ker } u$ , de sorte que  $\dim \text{Ker } u = n - 1$  et  $u$  est donc de rang 1. Soit  $a$  un vecteur directeur de  $\text{Im } u$  : pour tout  $x \in E$ , il existe  $\varphi(x) \in K$  tel que

$$u(x) = \varphi(x)a \iff t(x) = x + \varphi(x)a.$$

On vérifie immédiatement que  $\varphi$  est linéaire. De plus,  $a \in \text{Im } u \subset H$  donc  $u(a) = 0 \iff t(a) = a$  et donc  $\varphi(a) = 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $\varphi$  étant non nulle est de rang 1 donc surjective. Soit  $e_1 \in E$  tel que  $\varphi(e_1) = 1$ , et donc  $t(e_1) = e_1 + a$ . On pose  $e_2 = a$  qu'on complète en une base  $(e_2, \dots, e_n)$  de  $H$ . Comme  $e_1 \notin H$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $t$  est de la forme voulue.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  cette base, et  $H = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ .  $t \in \text{GL}(E)$  puisque sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est inversible, différent de  $\text{id}_E$  puisque sa matrice n'est pas  $I_n$ . On a  $t(e_i) = e_i$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  donc  $t(x) = x$  pour tout  $x \in H$ , et  $t(e_1) = e_2 \in H$ , ce qui conclut.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.13.** (a) On considère des bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $E$  adaptées aux décompositions  $E = D_1 \oplus D_2 = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ . Les éléments de  $\mathcal{D}$  dans ces deux bases ont alors des matrices diagonales. Soit  $M = \text{Diag}(\lambda, \mu)$  la matrice d'un élément de  $\mathcal{D}$  écrite dans les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$ . Soit  $(a, b, c, d) \in K^4$  telles qu'un vecteur directeur de  $D_3$  (resp. de  $\Delta_3$ ) ait  $(a, b)$  (resp.  $(c, d)$ ) pour coordonnées dans  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ). Comme  $\Delta_3$  est distincte de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on doit avoir  $cd \neq 0$ , de même que  $ab \neq 0$ . La condition  $u(D_3) \subset \Delta_3$  impose alors que  $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \mu b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  soient colinéaires, donc  $\lambda ad - \mu bc = 0$ , ce qui donne la relation  $\mu = \frac{ad}{bc} \lambda$ , et donc  $\mathcal{D}$  est la droite vectorielle

des éléments  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est de la forme  $\text{Diag}\left(\lambda, \frac{ad}{bc} \lambda\right)$  avec  $\lambda \in K$ , ou encore  $\lambda \text{Diag}(bc, ad)$  en changeant de constante arbitraire. Autrement dit,  $\mathcal{D}$  est associée dans  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$  à la droite  $\text{Vect}(\text{Diag}(bc, ad))$  de  $\mathcal{M}_2(K)$ , et est donc également une droite.

(b) On applique ce qui précède à  $\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1))$ ,  $\mathcal{B}_2 = ((1, 1), (1, 2))$  : on peut alors prendre  $(a, b) = (1, -1)$ ,  $(c, d) = (-1, 2)$  (puisque  $2(1, 2) - (1, 1) = (1, 3)$  dirige  $\Delta_3$ ) : les matrices des éléments de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$  sont de la forme  $M'(\lambda) = \text{Diag}(\lambda, 2\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\mathcal{B}_1$  est la base canonique et la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  est  $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  de sorte que la matrice d'un élément  $u \in \mathcal{D}$  dans la base canonique est de la forme

$$M(\lambda) = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} M'(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.14.** On exclut dans cet exercice les cas triviaux où  $F$ ,  $G$  ou  $F \cap G$  seraient égaux à  $\{0\}$  ou  $E$ .

(a) Notons  $n = \dim E$  et  $p = \dim F$ . On considère une base  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . On a alors  $u \in A$  si et seulement si  $u(e_1) = \dots = u(e_p) = 0$ , donc si et seulement si la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  a ses  $p$  premières colonnes nulles.  $A$  est donc isomorphe au sous-espace de  $\mathcal{M}_n(K)$   $\text{Vect}(E_{k, \ell}, 1 \leq k \leq n, p+1 \leq \ell \leq n)$ , donc de dimension  $n(n-p)$ .

$B$  est, de façon immédiate, isomorphe à  $\mathcal{L}(E, F)$ , donc de dimension  $np$ .

(b) On note  $q = \dim G$  et  $r = \dim(F \cap G)$ . On définit  $(b_1, \dots, b_r)$  une base de  $F \cap G$ , que l'on complète en une base  $(b_1, \dots, b_p)$  de  $F$  et en une base  $(b_1, \dots, b_r, b_{p+1}, \dots, b_{p+q-r})$  de  $G$ . On sait alors (voir dans le cours la preuve de la formule de Grassmann) que

$(b_1, \dots, b_{p+q-r})$  est une base de  $F + G$ , que l'on complète enfin en une base  $\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_n)$  de  $E$ . On a alors  $u \in C$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme par blocs

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & M_7 & M_8 \\ 0 & 0 & 0 & M_9 \end{pmatrix}$$

avec  $M_1 \in \mathcal{M}_r(K)$ ,  $M_2 \in \mathcal{M}_{r,p-r}(K)$ ,  $M_3 \in \mathcal{M}_{r,q-r}(K)$ ,  $M_4 \in \mathcal{M}_{r,n-p-q+r}(K)$ ,  $M_5 \in \mathcal{M}_{p-r,p-r}(K)$ ,  $M_6 \in \mathcal{M}_{p-r,n-p-q+r}(K)$ ,  $M_7 \in \mathcal{M}_{q-r,q-r}(K)$ ,  $M_8 \in \mathcal{M}_{q-r,n-p-q+r}(K)$ ,  $M_9 \in \mathcal{M}_{n-p-q+r,n-p-q+r}(K)$ . On en déduit que

$$\dim C = rn + (p-r)(n-q) + (q-r)(n-p) + (n-p-q+r)^2$$

dont le développement n'apporte par grand chose.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.15.** Si  $N_1$  est semblable à  $N_2$  et  $U_1$  à  $U_2$ , elles sont de même taille  $p = p_1 = p_2$  et  $q = q_1 = q_2$ , et si  $(P, Q) \in \text{GL}_p(K) \times \text{GL}_q(K)$  vérifient  $N_1 = PN_2P^{-1}$  et  $U_1 = QU_2Q^{-1}$ , alors  $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(K)$  a pour inverse  $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$  par un calcul direct et  $M_1 = RM_2R^{-1}$ .

Supposons réciproquement que  $M_1$  et  $M_2$  soient semblables : il existe  $u \in \mathcal{L}(K^n)$  et deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $K^n$  telles que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M_1$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = M_2$ . En notant  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p_1})$  et  $G = \text{Vect}(e_{p_1+1}, \dots, e_n)$  sont stables par  $u$ , l'induit de  $u$  sur  $F$  est nilpotent, et l'induit de  $u$  sur  $G$  est inversible. Le travail usuel sur les noyaux et images itérés (voir TD) donne l'existence d'un élément  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  minimal vérifiant  $\text{Im } u^k \oplus \text{Ker } u^k = E$ ,  $\text{Im } u^\ell = \text{Im } u^k$  et  $\text{Ker } u^\ell = \text{Ker } u^k$  pour tout  $\ell \geq k$ , et les induits de  $u$  sur  $\text{Ker } u^k$  et  $\text{Im } u^k$  sont respectivement nilpotent et inversible : montrons que  $F = \text{Ker}(u^k)$  et  $G = \text{Im}(u^k)$ .

\* Pour tout  $x \in F$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p(x) = 0$ , de sorte que  $x \in \text{Ker } u^p$ . Si  $p \leq k$ , alors  $\text{Ker } u^p \subset \text{Ker } u^k$  de façon directe, et si  $p \geq k$ , alors  $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^k$ , si bien que  $x \in \text{Ker } u^k$  dans tous les cas, et donc  $F \subset \text{Ker } u^k$ .

\* Pour tout  $x \in G$ , comme l'induit  $\tilde{u}$  de  $u$  sur  $G$  est inversible, toutes ses puissances le sont et on peut donc poser  $y = \tilde{u}^{-k}(x)$ , de sorte que  $\tilde{u}^k(y) = u^k(y) = x$ . On a donc  $G \subset \text{Im } u^k$ .

\* Comme  $n = \dim F + \dim G = \dim \text{Ker } u^k + \text{rg } u^k$ , on doit en fait avoir  $F = \text{Ker } u^k$  et  $G = \text{Im } u^k$ .

Le même raisonnement tient pour  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , si bien que d'une part

$$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p_1}) = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_{p_2})$$

ce qui impose que  $p_1 = p_2 = p$ , et d'autre part  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est la matrice de l'induit de  $u$  sur  $F$  dans  $(e_1, \dots, e_p)$  (resp.  $(e'_1, \dots, e'_p)$ ), si bien que  $N_1$  et  $N_2$  sont semblables, et de même pour  $U_1$  et  $U_2$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

#### Rang, matrices équivalentes, opérations sur les rangées

**E-7.16.** Soit  $X$  une colonne non nulle de  $M$ . Comme elle est de rang 1, pour toute colonne  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  de  $M$ , il existe  $y_i \in K$  tel

que  $C_i = y_i X$ . On pose alors  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  et on constate facilement que  $M = XY^T$ . On a alors  $M = (x_i y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $Y^T X = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{Tr}(M)$ .

$M^0 = I_n$  par convention, et pour  $p \geq 1$

$$M^p = X(Y^T X)^{p-1} Y^T = (\text{Tr } M)^{p-1} M.$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.17.** (a) Le sens direct est immédiat puisque les matrices triangulaires inférieures forment une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Réciproquement, si  $A^k = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est triangulaire inférieure pour tout  $k \geq 2$ , alors en particulier,  $A^2$  et  $A^3$  le sont, et on sait alors

que  $A^{-2}$  l'est aussi (cours : conséquence du pivot de Gauss), si bien que  $A = A^3 A^{-2}$  l'est également.

(b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $A^k = 0$ , évidemment triangulaire, pour tout  $k \geq 2$  mais elle ne l'est pas.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.18.** Soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$  le rang de  $A$ , il existe  $(P, Q) \in \text{GL}_n(K)^2$  tel que  $A = PJ_r Q$ . On a alors pour tout  $B \in \mathcal{M}_n(K)$

$$ABA = 0 \iff PJ_r QB P J_r Q = 0 \iff J_r QB P J_r = 0$$

et  $B \mapsto QBP$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$ , de sorte que  $\dim E_A = \dim E_{J_r}$ . On est ainsi ramené à calculer cette dernière dimension. En écrivant  $B$  par blocs

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

avec  $B_1 \in \mathcal{M}_r(K)$ ,  $B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$  et les deux autres de tailles compatibles, il vient  $J_R B J_r = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc

$$B \in E_{J_r} \iff B_1 = 0.$$

On en déduit que  $\dim E_A = \dim E_{J_r} = n^2 - r^2$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.19.** (a) La dimension de Dam est  $\frac{n}{2}$  si  $n$  est pair et  $\frac{n+1}{2}$  sinon. La stabilité par combinaison linéaire et produit est facile.

(b) Si  $n$  est pair,  $n = 2p$ , en effectuant les échanges de lignes successifs  $L_2 \leftrightarrow L_{2p-1}$ ,  $L_4 \leftrightarrow L_{2p-3}$ , etc., puis de même sur les colonnes de  $A$ , il vient  $A = UDU$  où  $D$  est diagonale par blocs, de blocs diagonaux de taille  $p$ , et  $U$  est un produit de matrices d'échanges commutant deux à deux (elles interviennent sur des lignes/colonnes deux à deux distinctes) de sorte que  $U^{-1} = U$ . Il vient  $A^{-1} = UD^{-1}U$ ,  $D^{-1}$  étant de même diagonale par blocs de blocs diagonaux de taille  $p$ , ce qui montre que  $A^{-1}$  est en damier ( $UD^{-1}U$  effectue les mêmes opérations en sens inverse). Le même raisonnement est valide si  $n$  est impair en fixant la ligne et la colonne du milieu.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.20.** Notons  $d = \inf\{k \in \mathbb{N}, \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(K) \times \mathcal{M}_{k,q}(K) \text{ telles que } M = AB\}$ . Si  $M = AB$  avec  $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(K) \times \mathcal{M}_{k,q}(K)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , alors

$$\text{rg } M \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B) \leq \min(\min(p, k), \min(k, q)) \leq k$$

si bien que  $\text{rg } M \leq d$ .

Supposons que  $\text{rg } M = r \in \mathbb{N}$  : il existe  $(U, V) \in \text{GL}_p(K) \times \text{GL}_q(K)$  telles que

$$M = UJV$$

où  $J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ . Or

$$J = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \end{pmatrix}$$

si bien que  $M = AB$  avec

$$A = U \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,r}(K) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \end{pmatrix} V \in \mathcal{M}_{r,q}(K).$$

On en déduit que  $r \geq d$  et donc  $r = d$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.21.** (a) On pose  $C_j = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{\ell,j} \end{pmatrix}$  pour  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . L'image de  $A$  est engendrée par ses colonnes, donc incluse dans la somme

des images des  $(C_j)_{1 \leq j \leq k}$  qui contient évidemment toutes les colonnes de  $A$ . Il vient

$$\text{Im}(A) \subset \sum_{j=1}^k \text{Im}(C_j)$$

donc

$$\text{rg}(A) \leq \dim \left( \sum_{j=1}^k \text{Im}(C_j) \right) \leq \sum_{j=1}^k \text{rg}(C_j).$$

De façon analogue, en transposant, on aboutit pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  à  $\text{rg}(C_j) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \text{rg}(A_{i,j})$  d'où le résultat.

(b) On a avec la question précédente

$$\text{rg}(A) = n \leq \text{rg}(B) + \text{rg}(C) + \text{rg}(D) \leq \text{rg}(B) + n - p + n - m$$

d'où le résultat.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.22.** Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, on obtient  $AB = I_n$  donc  $BA = I_n$  et le résultat en multipliant par  $B$ .

Sinon,  $A^2B = A \Rightarrow \text{Ker } B \subset \text{Ker } A$  et donc  $\text{Ker } B = \text{Ker } A$  par argument dimensionnel avec le théorème du rang. En termes des endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés, il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  telle que  $\text{Ker } a = \text{Ker } b = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$  et  $\text{Im } a = \text{Vect}(a(e_1), \dots, a(e_r))$ . Les matrices de  $a$  et  $b$  dans ces bases sont de la forme par blocs  $A' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}$ ,

$B' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ , où  $C$  et  $E$  sont de taille  $r \times r$ . Si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$ , on a

$$A = PA'P^{-1} ; B = PB'P^{-1}$$



si bien que  $A^2B = A \iff A'^2B' = A'$ , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui impose  $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} CE = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$  en extrayant la « colonne » de gauche. Comme  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = \text{rg}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = r$ ,  $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$  est la matrice d'une application injective de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$  donc possédant un inverse à gauche. On en déduit que  $CE = I_r$ , donc  $C$  est inversible d'inverse  $E$ , puis

$$B'^2 A' = \begin{pmatrix} E^2 C & 0 \\ FEC & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = B'$$

d'où finalement  $B^2 A = B$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.23.** À toutes fins utiles, on exclut dans toute la suite les cas où  $u = 0$  et  $u \in \text{GL}(E)$ , qui sont triviaux, de même que dans la dernière question pour les cas  $A = 0$  ou  $A$  inversible.

(a) Soit  $\tilde{u}$  la restriction de  $u$  à  $\text{Ker}(u^2)$ . D'après le théorème du rang

$$\dim \text{Ker}(u^2) = \text{rg}(\tilde{u}) + \dim \text{Ker } \tilde{u}.$$

Or,  $\text{Ker } \tilde{u} = \text{Ker}(u^2) \cap \text{Ker } u = \text{Ker } u$  et pour tout  $x \in \text{Im } \tilde{u}$ , il existe  $y \in \text{Ker}(u^2)$  tel que  $x = \tilde{u}(y) = u(y)$  d'où  $u(x) = u^2(y) = 0$ , si bien que  $x \in \text{Ker } u$ . On a donc  $\text{Im } \tilde{u} \subset \text{Ker } u$  et donc  $\text{rg}(\tilde{u}) \leq \dim \text{Ker } u$ . On en déduit que

$$\dim \text{Ker}(u^2) = \text{rg}(\tilde{u}) + \dim \text{Ker } u \leq 2 \dim \text{Ker } u$$

comme voulu.

(b) D'après le raisonnement de la question précédente,  $\dim \text{Ker}(u^2) = 2 \dim \text{Ker}(u)$  si et seulement si  $\text{rg}(\tilde{u}) = \dim \text{Ker } u$ , ou encore si et seulement si  $\text{Im } \tilde{u} = u(\text{Ker } u^2) = \text{Ker } u$  puisque l'on a déjà une inclusion. Ceci donne directement (i)  $\iff$  (iii). Si (i) est vérifié, alors  $\text{Im } \tilde{u} = \text{Ker } u$  et comme  $\text{Im } \tilde{u} \subset \text{Im } u$ , on a  $\text{Ker } u \subset \text{Im } u$ , ce qui prouve (i)  $\implies$  (ii). Enfin, si (ii) est vérifié, alors pour tout  $x \in \text{Ker } u$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ , d'où  $u^2(y) = u(x) = 0$  et donc  $y \in \text{Ker } u^2$ , puis  $x = u(y) \in u(\text{Ker } u^2)$  et donc (ii)  $\implies$  (iii), ce qui conclut à l'équivalence des trois propositions.

(c) Notons  $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ . Pour  $(X_1, X_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ,  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } N \iff \begin{cases} AX_1 = 0 \\ AX_2 = 0 \end{cases} \iff (X_1, X_2) \in \text{Ker}(A)^2$  de sorte que

$$\varphi : (X_1, X_2) \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

(qui est trivialement linéaire) est un isomorphisme de  $(\text{Ker } A)^2$  sur  $\text{Ker } N$ . On en déduit que  $\dim \text{Ker } N = \dim((\text{Ker } A)^2) = 2 \dim \text{Ker } A$ . De même

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } M \iff \begin{cases} AX_1 + X_2 = 0 \\ AX_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_2 = -AX_1 \\ A^2 X_1 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que nécessairement,  $X_1 \in \text{Ker}(A^2)$  et  $X_2 = -AX_1$ , si bien que

$$\psi : X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ -AX_1 \end{pmatrix}$$

est une application linéaire surjective de  $\text{Ker}(A^2)$  dans  $\text{Ker } M$ . Comme  $\varphi(X_1) = 0$  entraîne directement  $X_1 = 0$ , elle est aussi injective, donc bijective, et  $\dim \text{Ker } M = \dim \text{Ker}(A^2)$ . En rassemblant ces éléments, on a bien avec le théorème du rang

$$\dim \text{Ker}(A^2) = 2 \dim \text{Ker}(A) \iff \dim \text{Ker } M = \dim \text{Ker } N \iff \text{rg } M = \text{rg } N$$

ce qui conclut.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

#### Formes linéaires, équations de sous-espaces, systèmes linéaires

**E-7.24.** Le fait que  $u^\top \in \mathcal{L}(E^*)$  est immédiat. Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base de  $E^*$  des formes linéaires coordonnées associées, et  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  : pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$u^\top(e_j^*) = e_j^* \circ u$$

de sorte que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u^\top(e_j^*)(e_i) = e_j^* \circ u(e_i) = e_j^* \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_j^*(e_k) = a_{j,i}.$$

Il vient ainsi

$$u^\top(e_j^*) = \sum_{i=1}^n u^\top(e_j^*)(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^n a_{j,i}e_i^*$$

et donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(u^\top) = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = A^\top.$$

*Remarque : on généralise la définition et le résultat à toute application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  et  $F$  de dimensions finies. On a alors  $u^\top \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ . La démonstration est identique.*

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.25.** (a) Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\varphi_i : M \rightarrow \sum_{k=1}^n m_{i,k}$  et  $\psi_i : M \rightarrow \sum_{k=1}^n m_{k,i}$ . On a le lien clair

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \psi_i$$

ces deux formes linéaires calculant la somme de tous les coefficients d'une matrice : ceci montre que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$  est liée. Montrons par contre que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$  est libre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  : soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$  tel que

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i \varphi_i + \mu_i \psi_i) + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ , on obtient en particulier

$$\theta(E_{j,j} - E_{j,j+1}) = 0 = \mu_j - \mu_{j+1}$$

et

$$\theta(E_{j,n-1} - E_{j,n}) = 0 = \mu_{n-1}$$

ce qui donne  $\mu_j = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On obtient de même  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et il reste en notant  $\lambda$  cette valeur commune

$$\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i = 0.$$

En particulier,  $\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(E_{1,1}) = \lambda = 0$  et finalement,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ , ce qu'on voulait. On en déduit que

$$\dim E_0 = \dim \left( \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Ker } \varphi_i \right) \cap \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Ker } \psi_i \right) \right) = \dim \left( \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Ker } \varphi_i \right) \cap \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n-1} \text{Ker } \psi_i \right) \right) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$$

puisqu'il s'agit de l'intersection des noyaux de  $2n-1$  formes linéaires indépendantes. Pour  $M \in E$ , on a immédiatement  $M - s(M)I_n \in E_0$ , de sorte que  $M = (M - s(M)I_n) + s(M)I_n \in E_0 + \text{Vect}(I_n)$ . Cette dernière somme est directe puisque  $I_n \notin E_0$ , et on a donc

$$E = E_0 \oplus \text{Vect}(I_n)$$

d'où

$$\dim(E) = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2.$$

(b) Notons  $H = \text{Vect}((P_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n})$ . Il est clair que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $P_\sigma$  a la somme de toutes ses lignes et de toutes ses colonnes constante égale à 1, d'où  $H \subset E$ . Construisons une base de  $E_0$  : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$ , on pose

$$M_{i,j} = E_{i,j} + E_{n,n} - E_{i,n} - E_{n,j}.$$

On vérifie facilement que  $M_{i,j} \in E_0$ , et que  $(M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$  est libre, et constitue donc une base de  $E_0$  puisqu'elle contient  $(n-1)^2$  éléments. En notant  $\tau_{i,j}$  la transposition  $(i, j)$ , on vérifie encore que  $M_{i,j} = I_n - P_{\tau_{i,j}} \in H$ . On a donc  $E_0 \subset H$ , d'où  $E_0 \subset H \subset E = E_0 \oplus \text{Vect}(I_n)$ . Comme  $I_n \in H$ , on a en fait  $H = E$  ce qui conclut.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.26.** Si  $A = E$ , on sait (cours) que  $A^\circ = \{0\}$ , et le résultat est clair. Il en va de même si  $A = \{0\}$ . On suppose dans la suite que  $\dim A = r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

On considère  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $A$ , que l'on complète en une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , et la base  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  de  $E^*$  formée des formes coordonnées associées (pour rappel :  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ) : on montre que  $A^\circ = \text{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$ . Il est clair par définition que pour tout  $(i, j) \in \llbracket r+1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $e_i^*(e_j) = 0$  et donc  $H = \text{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*) \subset A$ . Réciproquement, soit  $\varphi \in A^\circ$  : on sait alors que  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^* = \sum_{i=r+1}^n \varphi(e_i)e_i^* \in H$ . On a donc bien  $A^\circ = H$  et donc  $\dim A + \dim A^\circ = r + n - r = n$  comme voulu.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

## Déterminants

**E-7.27.** (a) On remarque que les opérations usuelles sur les rangées d'un déterminant peuvent s'effectuer par blocs. Par exemple l'opération

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix}$$

se traduit par  $L_k \leftarrow L_k + iL_{n+k}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On la notera plus simplement  $\mathcal{L}_1 \leftarrow \mathcal{L}_1 + i\mathcal{L}_2$  pour signifier qu'on travaille sur des blocs de lignes, et de même avec des  $\mathcal{C}$  pour des blocs de colonnes. On a ainsi

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}_{\mathcal{L}_1 \leftarrow \mathcal{L}_1 + i\mathcal{L}_2} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix}_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_2 - i\mathcal{C}_1} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix} = \det((A+iB)(A-iB))$$

par un calcul par blocs.

(b) Par la formule du déterminant

$$\det \left( (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n p_{k,\sigma(k)}$$

on voit aussitôt que  $\det(\overline{P}) = \overline{\det(P)}$  pour toute matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On en conclut que si  $A$  et  $B$  sont à valeurs réelles

$$\det(M) = \det((A+iB)(A-iB)) = \det(A+iB) \det(A-iB) = \det(A+iB) \overline{\det(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2 \geq 0$$

ce qu'on voulait.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.28.** (a) On a immédiatement  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  donc en effectuant des calculs de déterminants par blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD-BC & B \\ 0 & D \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \det D = \det(AD-BC) \det D \iff \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD-BC)$$

puisque  $\det D \neq 0$ .

(b) Faire de même avec  $\begin{pmatrix} D^\top & 0 \\ -C^\top & I_n \end{pmatrix}$ .

(c) Faire de même avec  $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -D^{-1}CD & I_n \end{pmatrix}$ .

(d) Toutes ces relations étant continues en  $D$ , il suffit d'utiliser la densité de  $\mathrm{GL}_n(K)$  dans  $\mathcal{M}_n(K)$  (voir le cours de topologie pour des preuves de ce résultat).

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.29.** L'expression explicite du déterminant montre que  $z \mapsto \det(A(z))$  est polynomiale en  $z$ . L'hypothèse que  $A(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  montre que ce polynôme ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$  : c'est donc une constante non nulle  $d$  par le théorème de d'Alembert-Gauss. La formule des cofacteurs montre alors que les coefficients de  $dA(z)^{-1}$  sont des déterminants extraits de  $A(z)$  donc des polynômes en  $z$ , ce qui conclut.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.30.** On a

$$MM^{-1} = I_n \iff \begin{cases} AA' + BC' = I_k \\ AB' + BD' = 0 \\ CA' + DC' = 0 \\ CB' + DD' = I_{n-k} \end{cases}$$

d'où  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_{n-k} \end{pmatrix}$  puis le résultat en prenant le déterminant.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.31.** (a) Soit  $P : x \mapsto \det(M+xJ)$ , où  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  a tous ses coefficients égaux à 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les transformations  $C_i \leftarrow C_i - C_1$  pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  sur  $P(x)$  annulent tous les  $x$  du déterminant sauf ceux de la première colonne. Un développement par rapport à cette première colonne montre alors que  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. On a facilement  $P(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a)$  et

$P(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$ . La connaissance de ces deux valeurs suffit à connaître le polynôme  $P$  puisqu'il est de degré inférieur ou égal à 1 : il vient

$$P(x) = \frac{x+b}{b-a} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) + \frac{x+a}{a-b} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et donc

$$D_n(a, b) = P(0) = \frac{b}{b-a} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) + \frac{a}{a-b} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b).$$

(b) Par continuité du déterminant,  $D_n(a, a) = \lim_{b \rightarrow a} D_n(a, b)$ . Notons que si  $a$  est nul,  $D_n(0, 0) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ . On suppose donc maintenant que  $a \neq 0$ , et on prend  $b \neq 0$  également puisqu'on va le faire tendre vers  $a$ . Il vient

$$D_n(a, b) = -ab \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{b} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b) - \frac{1}{a} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \right].$$

Si l'on pose  $f(x) = \frac{1}{x} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x)$  pour  $x \neq 0$ , on voit apparaître ci-dessus le taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $b$ , et sa limite est donc

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - a).$$

Il vient

$$D_n(a, a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - a).$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.32.** (a) On considère la suite des polynômes de Tchebychev  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui est telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ , avec  $\deg(T_n) = n$ . On pose  $c_i = \cos(x_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$T_k = \sum_{\ell=0}^k a_{k,\ell} X^\ell.$$

La  $k$ -ième colonne de  $A$  est alors  $\begin{pmatrix} T_k(c_0) \\ \vdots \\ T_k(c_n) \end{pmatrix}$ . On effectue dans  $\det(A)$  les opérations  $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{k,0}}{a_{0,0}} C_0$  pour tout  $k \geq 1$ , puis  $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} C_1$  pour tout  $k \geq 2$ , etc., et on factorise chaque colonne par le coefficient dominant de  $T_k$  :  $\det(A)$  est alors égal au déterminant de la matrice « presque » de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{1,1}c_0 & a_{2,2}c_0^2 & \dots & a_{n,n}c_0^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{0,0} & a_{1,1}c_n & a_{2,2}c_n^2 & \dots & a_{n,n}c_n^n \end{pmatrix}.$$

On sait (on retrouve facilement) que  $a_{0,0} = 1$  et  $a_{k,k} = 2^{k-1}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si bien que

$$\det(A) = a_{0,0} \dots a_{n,n} \begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \dots & c_0^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{vmatrix} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i).$$

$A$  est de même rang que cette matrice, qui est  $r = \text{Card}\{c_i, 0 \leq i \leq n\}$  (autant que de cosinus distincts), puisqu'il s'agit clairement de la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de  $A$ .

(b) On a

$$|\det(A)| = \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n \cos((\sigma(k) - 1)x_k) \right| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{k=1}^n |\cos((\sigma(k) - 1)x_k)| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} 1 = n!.$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.33.** On note  $C$  la colonne  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , et  $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ . Par  $n$ -linéarité et en annulant tous les déterminant ayant deux colonnes identiques, il vient

$$\begin{aligned} \det M &= \det(C + a_1 E_1, \dots, C + a_n E_n) = \det(a_1 E_1, \dots, a_n E_n) + \det(C, a_2 E_2, \dots, a_n E_n) + \dots \\ &\quad + \det(a_1 E_1, \dots, a_{k-1} E_{k-1}, C, a_{k+1} E_{k+1}, \dots, a_n E_n) + \dots + \det(a_1 E_1, \dots, a_{n-1} E_{n-1}, C) \end{aligned}$$

d'où

$$\det M = \prod_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j.$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.34.** On note  $J = E_{1,1}$ . Comme  $\text{rg}(X) = 1$ ,  $X = UJV$  avec  $U$  et  $V$  inversibles, d'où

$$\det(A + X) = \det(A + UJV) = \det(UV) \det(U^{-1}AV^{-1} + J)$$

et de même  $\det(A - X) = \det(UV) \det(B - J)$  où l'on a noté  $B = U^{-1}AV^{-1} = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , la matrice  $B + J$  ayant les mêmes coefficients hormis celui en position  $(1, 1)$  qui est  $b_{1,1} + 1$ . Par linéarité du déterminant par rapport à sa première colonne

$$\det(B + J) = \det B + \det B'$$

où  $B'$  a pour première colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et ensuite les mêmes colonnes que  $B$ . De même,  $\det(B - J) = \det B - \det B'$ . Finalement

$$\det(A + X) \det(A - X) = \det(UV)^2 (\det B + \det B') (\det B - \det B') = \det(UV)^2 ((\det B)^2 - (\det B')^2) \leq \det(UV)^2 (\det B)^2 = (\det A)^2.$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.35.** On note  $(A_1, \dots, A_p)$  la liste des colonnes de  $A$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ . On a alors par multilinéarité du déterminant

$$\det(AB) = \det \left( \sum_{k=1}^p b_{k,1} A_k, \dots, \sum_{k=1}^p b_{k,n} A_k \right) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 1, p \rrbracket^n} b_{k_1,1} \dots b_{k_n,n} \det(A_{k_1}, \dots, A_{k_n}).$$

Dans la somme de droite, tous les termes pour lesquels les  $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$  ne sont pas deux à deux distincts sont nuls. On regroupe alors les autres termes selon la liste des colonnes présentes : pour tout  $S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)$ , en notant  $U$  l'ensemble de toutes les bijections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $S$ , il vient

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \sum_{\varphi \in U} b_{\varphi(1),1} \dots b_{\varphi(n),n} \det(A_{\varphi(1)}, \dots, A_{\varphi(n)}).$$

On réordonne alors par indices croissants les termes de  $\det(A_{\varphi(1)}, \dots, A_{\varphi(n)})$  pour tout  $S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)$  et tout  $\varphi \in U$ , ce qui donne  $\varepsilon(\varphi) \det(A^S)$ , où  $\varepsilon(\varphi)$  est précisément la signature de la permutation  $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$  des colonnes de la matrice  $B_S$ . Il vient en définitive

$$\det(AB) = \sum_{S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \sum_{\varphi \in U} \varepsilon(\varphi) b_{\varphi(1),1} \dots b_{\varphi(n),n} \det(A^S) = \sum_{S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \det(A^S) \sum_{\varphi \in U} \varepsilon(\varphi) b_{\varphi(1),1} \dots b_{\varphi(n),n} = \sum_{S \in \mathcal{P}_n(\llbracket 1, p \rrbracket)} \det(A^S) \det(B_S)$$

comme voulu.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.36.** Notons  $(m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = ((a_i + b_j)^{n-1})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , on a alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec la formule du binôme

$$m_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_i^k b_j^{n-1-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} a_i^{k-1} b_j^{n-k} = \sum_{k=1}^n u_{i,k} v_{k,j}$$

avec  $u_{i,j} = \binom{n-1}{j-1} a_i^{j-1}$  et  $v_{i,j} = b_j^{n-i}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . On en déduit que  $M = UV$  avec  $U = \left( \binom{n-1}{j-1} a_i^{j-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $V =$

$\left( b_j^{n-i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ . On reconnaît dans  $\det V$  le déterminant de Vandermonde associé aux scalaires  $(b_1, \dots, b_{n-1})$ , écrit en lignes et « à

l'envers » (dans le sens des puissances décroissantes du haut en bas). La permutation qui renverse l'ordre est le produit de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  transpositions et est donc de signature  $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . On en déduit que

$$\det V = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).$$

On peut factoriser  $\det U$  par  $\binom{n-1}{j-1}$  dans chaque colonne  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Une fois cette opération effectuée, on reconnaît un déterminant de Vandermonde usuel. Il vient

$$\det U = \left( \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right)$$

d'où finalement

$$\det(M) = \det(U) \det(V) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left( \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i) \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right).$$

Remarque : on montre assez facilement que  $\prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \prod_{k=1}^{n-1} k^{2k-n} \dots$  ce qui n'apporte pas grand chose de plus ici.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.37.** Quitte à réordonner les  $a_i$  dans l'ordre croissant (ce qui ne change éventuellement que le signe de  $D$ ) et à ajouter  $n - a_1$  à tous les termes (ce qui ne change pas les différences apparaissant au numérateur), on peut supposer  $n \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  (et même  $a_1 =$

$n$ , ce qui ne change rien ci-après). On note  $V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$  le déterminant de Vandermonde qui apparaît au numérateur.

On remarque que  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$  fait apparaître  $n - 1$  fois le facteur 1,  $n - 2$  fois le facteur 2, etc., 1 fois le facteur  $n - 1$ , d'où

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = 1!2! \dots (n - 1)!$$

Par opérations sur les colonnes, on remarque aussi que

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1 - 1) & \dots & a_1(a_1 - 1) \dots (a_1 - n + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n - 1) & \dots & a_n(a_n - 1) \dots (a_n - n + 2) \end{vmatrix}$$

Il vient

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{a_1}{1!} & \frac{a_1(a_1 - 1)}{2!} & \dots & \frac{a_1(a_1 - 1) \dots (a_1 - n + 2)}{(n - 1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{0!} & \frac{a_n}{1!} & \frac{a_n(a_n - 1)}{2!} & \dots & \frac{a_n(a_n - 1) \dots (a_n - n + 2)}{(n - 1)!} \end{vmatrix} = \det(M)$$

où  $M = \left( \binom{a_j}{i-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une matrice à coefficients entiers.  $D$  est donc bien entier.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.38.** En retranchant la dernière ligne de  $D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$  à toutes les autres, en réduisant au même dénominateur, puis en factorisant  $a_n - a_j$  dans la colonne  $j$  et  $\frac{1}{a_n + b_j}$  dans la ligne  $j$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , il vient

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

On retranche maintenant la dernière colonne à toutes les autres, et par des opérations analogues, il vient

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_{n-1})(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on aboutit à la relation de récurrence

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_{n-1})(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n)} D_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}).$$

On en déduit par une récurrence facile que

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (a_i + b_j)}.$$

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.39.** On sait que

$$|\det(A)| = \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, \sigma(i)}|.$$

Par ailleurs

$$P(A) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} \prod_{i=1}^n |a_{i, j_i}| = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, f(i)}|$$

où l'on a noté  $\mathcal{F}_n = \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$  l'ensemble de toutes les applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même. Comme  $\mathcal{S}_n \subsetneq \mathcal{F}_n$ , on a donc

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, \sigma(i)}| \leq P(A)$$

avec égalité si et seulement si  $\prod_{i=1}^n |a_{i, f(i)}| = 0$  pour tout  $f \in \mathcal{F}_n$  non bijective.

Il est clair que si  $A$  possède une ligne nulle, alors  $A$  n'est pas inversible, donc  $\det(A) = 0$ , et  $P(A) = 0$  car l'un des termes de ce produit est nul.  $A$  est donc solution du problème.

Il est clair aussi que si  $A$  possède exactement un terme non nul par ligne et par colonne, alors  $\det(A)$  est égal, au signe près, au produit de ces termes, de même que  $P(A)$ , et  $A$  est donc encore solution du problème.

Montrons que ce sont les seules solutions. Supposons d'abord que  $A$  possède au moins un terme non nul par ligne, et qu'il existe une ligne  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  de  $A$  possédant aux moins deux termes non nuls. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut donc choisir  $j_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $a_{i, j_i} \neq 0$ , et on peut encore choisir  $j'_k \neq j_k$  tel que  $a_{k, j'_k} \neq 0$ .

\* Si la liste  $(j_1, \dots, j_n)$  contient deux éléments égaux, on pose  $g(i) = j_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

\* Si la liste  $(j_1, \dots, j_n)$  contient des éléments deux à deux distincts, alors on pose  $g(i) = j_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$ , et  $g(k) = j'_k$ .

Par construction,  $g$  n'est pas injective, et  $a_{i, g(i)} \neq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On en déduit que

$$P(A) = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, f(i)}| \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, \sigma(i)}| + \prod_{i=1}^n |a_{i, g(i)}| > \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n |a_{i, \sigma(i)}| \geq |\det(A)|$$

et donc que  $A$  n'est pas solution du problème.

Enfin, si  $A$  possède exactement un terme non nul par ligne mais pas par colonne, alors  $P(A)$  est égal au produit des valeurs absolues de ces termes donc n'est pas nul, tandis que  $A$  a au moins une colonne nulle, donc  $|\det(A)| = 0$ .

Finalement, les seules solutions du problème sont les matrices  $A$  ayant une ligne nulle, ou exactement un terme non nul par ligne et par colonne.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

#### Calculs de polynômes caractéristiques

**E-7.40.** (a) En effectuant les opérations  $DC_1$  puis  $DL_1$ , il vient  $P_{n+2} - XP_{n+1} + P_n = 0$ .

(b)  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable. On résout la récurrence double pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

\* si  $|t| > 2$

$$P_n(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2} \right);$$

\*  $P_n(2) = n + 1$  et  $P_n(-2) = (-1)^n(n + 1)$ ;

\* si  $|t| < 2$

$$P_n(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t + i\sqrt{4 - t^2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{t - i\sqrt{4 - t^2}}{2} \right).$$

*Remarque :* il n'apparaît pas de façon immédiate sur ces expressions que  $P_n$  est un polynôme. On constate alors qu'il n'y a pas de racine réelle  $t$  telle que  $|t| \geq 2$  (aucune annulation de la première expression). On résout dans  $\mathbb{C}$   $P_n(t) = 0$  pour  $|t| < 2$ , par exemple en posant  $t = 2 \sin u$  avec  $u \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Il vient les valeurs propres  $\left\{ 2 \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), k \in \left[ \left[ -\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1 \right] \right] \right\}$  si  $n$  est pair et  $\left\{ 2 \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right), k \in \left[ \left[ -\frac{n-1}{2} - 1, \frac{n-1}{2} \right] \right] \right\}$  si  $n$  impair.

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

**E-7.41.** (a) Si  $V = (x_1 \dots x_n)^\top$  est tel que  $AV$  est à coefficients positifs ou nuls, alors chaque  $x_i$  pour  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$  est plus grand que la moyenne des deux qui l'encadrent. Si le minimum des  $x_i$  est atteint en un de ces points, alors les deux qui l'encadrent doivent lui être égaux et par itération,  $V$  est le vecteur  $\lambda(1 \dots 1)^\top$  et  $\lambda \geq 0$  puisque  $2\lambda - \lambda \geq 0$  en regardant la première coordonnée de  $AV$ . Sinon, ce minimum est atteint en  $x_1$  ou  $x_n$ , et  $x_2 \leq 2x_1 \leq 2x_2$  impose  $x_1 \geq 0$  de même que  $x_n$ .

(b) Si  $AV = 0$ , alors  $V$  est à coefficients positifs ou nuls, et négatifs ou nuls de même, d'où  $V = 0$ . Les colonnes  $(C_1, \dots, C_n)$  de  $A^{-1}$  vérifient  $AC_i$  à coefficients positifs ou nuls (c'est la  $i$ -ème colonne de  $I_n$ ) donc  $C_i$  aussi avec ce qui précède.

(c) Le polynôme caractéristique  $\chi_n$  de  $A$  vérifie la récurrence  $\chi_n = (X-2)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}$  en développant directement par rapport à la dernière colonne. Reconnaître dans  $T_n = \chi_n(2X+2)$  les polynômes de Tchebychev : les valeurs propres de  $A$  sont les  $\left\{ \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{n} \right) + 2, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ .

### Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé