1. Espaces vectoriels normés - Exercices

Du crabe gelé

E désigne un espace vectoriel normé. Sauf mention explicite, sa norme sera notée $\|.\|$ et la distance associée d.

Normes, équivalence

E-1.1. *(5')** Pour tout $(x, y, z) \in E^3$ tel que $x + y + z = 0$, montrer que

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geqslant \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|).$$

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.2. *(10')** Soit $\mathrm{d} : (x, y) \mapsto \dfrac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$ définie sur E^2.

(a) Montrer que d est une distance sur E.

(b) Est-elle associée à une norme ?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.3. *(5')** Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\|AB\| = \|A\|\,\|B\|$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.4. *(10')** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'ensemble des polynômes complexes unitaires de degré inférieur ou égal à n. Montrer que

$$\inf_{P \in U_n} \left(\sup_{z \in \overline{D}(0,1)} |P(z)| \right) > 0.$$

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.5. *(15')*** Soit l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|.$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter sa sphère unité.

(b) Déterminer des constantes optimales $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que $aN \leqslant N' \leqslant bN$ pour $N' = \|.\|_\infty$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.6. *(10')*** Pour tout $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, montrer que

$$\|x - y\| \geqslant \frac{1}{2} \max(\|x\|, \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.7. *(20')*** Soient $(a, b) \in E^2$, $(r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer les propriétés suivantes.

(a) $\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$.

(b) $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \varnothing \iff \|a - b\| < r + s$.

(c) $B(a + b, r + s) = B(a, r) + B(b, s)$.

(d) $B(a, r) = B(b, s) \iff a = b$ et $r = s$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.8. *(15')*** Soient $E = \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $A = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On définit $f \in E$ par $f(x) = 1$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 0$ sinon. Déterminer $\mathrm{d}(f, A)$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.9. *(15')**** Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme ∞ canonique notée $\|.\|$, et on considère $(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i\| \leqslant 2n \sup_{J \subset [\![1,p]\!]} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|.$$

Énoncé détaillé – Corrigé

Bornes inférieure et supérieure

E-1.10. (*5'*)* A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B$ l'ensemble

$$A+B=\{x\in\mathbb{R},\ \exists(a,b)\in A\times B,\ x=a+b\}.$$

Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure et la déterminer.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.11. (*10'*)** Donner la valeur de $\inf\limits_{\alpha\in]0,\pi[}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\sin(n\alpha)|$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.12. (*N'*)*** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n la distance de l'origine O du plan au graphe de la fonction $f:x\mapsto\cos^n x$. Étudier la convergence de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en donner un équivalent.

Énoncé détaillé – Corrigé

Suites de réels

E-1.13. (*10'*)* *Moyenne arithmético-géométrique.* Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $0<a<b$. On pose $u_0=a$, $v_0=b$, $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que u et v ont une limite commune.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.14. (*10'*)* Étudier le sens de variation de la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas ci-dessous.

(a) $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. (b) $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+n}\end{cases}$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.15. (*10'*)* Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux divergentes.

(b) Montrer que $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.16. (*5'*)* Soit $u\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ injective. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.17. (*10'*)** *Irrationalité de* e. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\,n!}$.

(a) Que peut-on dire de u et v ?

(b) En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}$, en déduire que $\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.18. (*15'*)** Soit u une suite à termes strictement positifs.

(a) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Montrer que $\ell<1\Rightarrow\lim u=0$ et $\ell>1\Rightarrow\lim u=+\infty$.

(b) Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$. Étudier la réciproque.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.19. (*15'*)*** Soit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(n)}{n}$ existe et vaut ℓ. Donner la valeur de ℓ.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.20. (*30'*)*** *Densité d'une partie de* $\mathbb{N}$. Soit $A\subset\mathbb{N}$. On dit que A *possède une densité* si

$$\delta(A)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}(A\cap[\![0,n]\!])}{n+1}$$

existe, $\delta(A)$ étant alors la *densité* de A.

(a) Quelle est la densité de $a\mathbb{N}$ pour $a\in\mathbb{N}^*$? De $\{a^n,n\in\mathbb{N}\}$ pour $a\in\mathbb{N}$, $a\geqslant2$?

(b) Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de densité.

(c) Soient A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$ ayant une densité. Que peut-on dire de $A\cup B$?

(d) Soit $u\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ majorée. Montrer l'équivalence entre

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k=0$.

(ii) Il existe $A\subset\mathbb{N}$ de densité égale à 1 telle que $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ n\in A}}u_n=0$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.21. (*10'*)*** *Suites sous-additives, suite. Cet exercice prolonge celui sur le lemme de Fekete vu en TD.* Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. Montrer que $u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé détaillé – Corrigé

Relations de comparaison, développements limités et asymptotiques

E-1.22. (*20'*)** Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que l'équation $x = n \ln x$ possède deux solutions $u_n < v_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour n assez grand.
(b) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.
(c) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers l'infini.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.23. (*10'*)** Soit $k \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer qu'il existe un unique $x_k \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_k = x_k$.
(b) Donner un développement aymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ de x_k lorsque k tend vers l'infini.

Énoncé détaillé – Corrigé

Suites récurrentes de réels ou de complexes

E-1.24. (*15'*)** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature de u.

Énoncé détaillé – Corrigé

Suites d'un espace vectoriel normé, suites extraites, valeurs d'adhérence

E-1.25. (*20'*)** *Théorème de Cesàro.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$ une suite convergente et ℓ sa limite. On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que v converge vers ℓ.
(b) Étudier la réciproque de ce résultat.
(c) Étudier la réciproque de ce résultat lorsque u est à valeurs réelles et croissante.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.26. (*10'*)** Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in E^{\mathbb{N}^2}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = \lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ existe dans E, et telle que $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$ existe dans E. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{n,\varphi(n)}$ converge vers ℓ.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.27. (*15'*)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}).$$

Montrer que u converge.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.28. (*15'*)** *Lemme des pics.*
(a) Montrer que toute suite réelle possède une sous-suite monotone.
(b) Donner une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.29. (*20'*)*** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, et $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, alors u est convergente.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.30. (*N'*)*** Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leqslant a_0 \leqslant b_0 \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad b_{n+1} = \int_0^1 \max(x, a_n)\,\mathrm{d}x.$$

Étudier les suites a et b.

Énoncé détaillé – Corrigé

Suites de Cauchy, complétude

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si et seulement si elle vérifie la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geqslant q \geqslant n_0 \Rightarrow \mathrm{d}(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

Un espace vectoriel normé est *complet* si et seulement si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.

En préalable à tous les exercices ci-dessous, il est nécessaire d'aborder l'exercice correspondant de votre feuille de TD, qui montre la complétude de $\mathbb{R}$, puis celle de tout espace vectoriel normé de dimension finie.

E-1.31. (*5'*)* Soient E un espace vectoriel normé et $(u,v) \in (E^{\mathbb{N}})^2$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - v_n\| = 0$. Montrer que si u est de Cauchy, alors v est de Cauchy.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.32. (*5'*)* Montrer directement que toute suite de Cauchy d'entiers relatifs est convergente sans utiliser la complétude de $\mathbb{R}$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.33. (*5'*)** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(a) Montrer que u est convergente.

(b) *Application* : montrer que la suite définie par la relation de récurrence $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n u_n^2}$ est convergente.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.34. (*10'*)** Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente dans E.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.35. (*10'*)** Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}.$$

Montrer que u converge.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.36. (*10'*)** *Un espace vectoriel normé non complet.* Soit $E = \mathbb{C}[X]$. À $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, on associe $\|P\| = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.

(a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

(b) Montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{2^k}$ est de Cauchy.

(c) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.37. (*15'*)*** Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-1.38. (*25'*)*** *Nombre de rotation d'un homéomorphisme du cerle.* Soit F une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et telle que $F - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ soit périodique de période 1. On note $F^n = F \circ \ldots \circ F$ (n fois) pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(t)}{n}$ existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(u)}{n}$ existe et vaut ρ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $(m,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ tel que $F^m(x) = x + k$. Montrer que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(t)}{n}$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vaut $\dfrac{k}{m}$.

(c) Montrer, en toute généralité, que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(t)}{n}$$

existe et est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

Si l'on pose $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi F(t)}$, alors on constate que f est une bijection bi-continue de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ (un homéomorphisme du cercle). ρ représente alors la « rotation moyenne » subie par les points de $\mathbb{U}$ lorsqu'on applique f, d'où son nom de « nombre de rotation ».

Énoncé détaillé – Corrigé

1. Espaces vectoriels normés - Exercices (énoncés détaillés)

E désigne un espace vectoriel normé. Sauf mention explicite, sa norme sera notée $\|.\|$ et la distance associée d.

Normes, équivalence

E-1.1. (*5'*)* Soit $(x, y, z) \in E^3$ tel que $x+y+z=0$.
(a) Montrer que $\|x-y\|+\|y-z\| \geqslant 3\|y\|$.
(b) Montrer que

$$\|x-y\|+\|y-z\|+\|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}(\|x\|+\|y\|+\|z\|).$$

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.2. (*10'*)* Soit $\mathrm{d}:(x, y) \mapsto \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ définie sur E^2.
(a) Montrer que d est une distance sur E. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra remarquer que $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est croissante.
(b) Montrer que d n'est associée à aucune norme (on s'intéressera en particulier à l'homogénéité).

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.3. (*5'*)* Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\|AB\|=\|A\|\,\|B\|$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On cherchera un contre-exemple avec la matrice nulle.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.4. (*10'*)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'ensemble des polynômes complexes unitaires de degré inférieur ou égal à n.
(a) Montrer que $P \mapsto \|P\|=\sup\limits_{z \in \overline{D}(0,1)}|P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) En introduisant une seconde norme bien choisie, montrer que

$$\inf_{P \in U_n}\left(\sup_{z \in \overline{D}(0,1)}|P(z)|\right)>0.$$

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.5. (*15'*)** Soit l'application $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x, y)=\sup_{t \in[0,1]}|x+t y|.$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x \geqslant 0$, tracer l'allure du graphe de $t \mapsto|x+t y|$ selon les valeurs de y, pour en déduire la valeur explicite de $N(x, y)$, puis représenter la sphère unité de N.
(b) À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer des constantes optimales $(a, b) \in(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que $aN \leqslant N' \leqslant bN$ pour $N'=\|.\|_{\infty}$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.6. (*10'*)** Soit $(x, y) \in(E \setminus\{0\})^2$. On suppose par exemple que $\|x\| \leqslant\|y\|$, et on considère $x'=\dfrac{\|y\|}{\|x\|} x$.
(a) Représenter x, x' et y sur le même dessin.
(b) Montrer que

$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2} \max (\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.7. (*20'*)** Soient $(a, b) \in E^2$, $(r, s) \in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer les propriétés suivantes.
(a) $\lambda B(a, r)=B(\lambda a,|\lambda| r)$.
(b) $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset \iff \|a-b\|<r+s$. Pour la réciproque, faire un dessin en choisissant un point c judicieux du segment $[a, b]$.
(c) $B(a+b, r+s)=B(a, r)+B(b, s)$. Pour l'inclusion droite-gauche, on considérera $x \in B(a+b, r+s)$, et (u, v) tels que $u \in[0, r[$, $v \in[0, s[$ et $u+v=\|x-a-b\|$.
(d) $B(a, r)=B(b, s) \iff a=b$ et $r=s$. On pourra raisonner par l'absurde en considérant séparément les cas $r<s$ et $a \neq b$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-1.8. $(15')^{**}$ Soient $E = \mathscr{B}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $A = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit $f \in E$ par $f(x) = 1$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 0$ sinon.

(a) Montrer que $\mathrm{d}(f, A) \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) Soit $g \in A$. En considérant la valeur de g en $\frac{1}{2}$, montrer que $\mathrm{d}(f, g) \geqslant \frac{1}{2}$, puis que $\mathrm{d}(f, A) = \frac{1}{2}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.9. $(15')^{***}$ Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme ∞ canonique notée $\|.\|$, et on considère $(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i\| \leqslant 2n \sup_{J \subset [\![1,p]\!]} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|.$$

On pourra répartir les vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ en les regroupant selon le plus petit indice où ils atteignent leur norme ∞, et le signe de la coordonnée correspondante.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Bornes inférieure et supérieure

E-1.10. $(5')^{*}$ A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B$ l'ensemble

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.11. $(10')^{**}$ Montrer que $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On regardera le sinus des multiples successifs de $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.12. $(N')^{***}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la distance de l'origine O du plan au graphe de la fonction $f : x \mapsto \cos^n x$.

(a) Justifier que $\mathrm{d}_n \leqslant \sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} + \cos^{2n} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}}$.

(b) Montrer que d_n est atteint en un point x_n de $]0, 1[$ vérifiant l'équation $x_n = n \sin x_n \cos^{2n-1} x_n$.

(c) Donner un équivalent de d_n quand n tend vers l'infini.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Suites de réels

E-1.13. $(10')^{*}$ *Moyenne arithmético-géométrique.* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u et v sont adjacentes.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.14. $(10')^{*}$ Étudier le sens de variation de la suite de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas ci-dessous.

(a) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On factorisera judicieusement $u_{n+1} - u_n$.

(b) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n} \end{cases}$. On évaluera $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.15. $(10')^{*}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $(\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\cos(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(b) À l'aide de formules de trigonométrie, montrer qu'elles sont toutes les deux divergentes.

(c) Montrer que $(\tan n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.16. $(5')^{*}$ Soit $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ injective. En revenant à la définition, montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.17. (*10'*)** *Irrationalité de* e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$.

(a) Montrer que u et v sont adjacentes.

(b) On admet que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$ et on suppose que cette quantité s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. À l'aide d'un encadrement obtenu par la question précédente, aboutir à une contradiction. *On a ainsi prouvé que* $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.18. (*15'*)** Soit u une suite à termes strictement positifs.

(a) On suppose que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell < 1 \Rightarrow \lim u = 0$ et $\ell > 1 \Rightarrow \lim u = +\infty$. On reviendra à la définition « avec des ε » afin de comparer u à une suite géométrique.

(b) Montrer que si $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. On distinguera les cas $\ell = 0$, $\ell = +\infty$, et les autres. Étudier la réciproque.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.19. (*15'*)*** Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{n}$ existe et vaut ℓ.

(a) Que peut-on dire de l'ensemble des entiers naturels n tels que $f(n) \leqslant n$?

(b) Montrer que $\ell = 1$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.20. (*30'*)*** *Densité d'une partie de* $\mathbb{N}$. Soit $A \subset \mathbb{N}$. On dit que *A possède une densité* si

$$\delta(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}(A \cap [\![0, n]\!])}{n+1}$$

existe, $\delta(A)$ étant alors la *densité* de A.

(a) Montrer que la densité de $a\mathbb{N}$ pour $a \in \mathbb{N}^*$ est égale à $\frac{1}{a}$, puis que celle de $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$ est égale à 0.

(b) Montrer que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![2^{2n}, 2^{2n+1} - 1]\!]$ n'a pas de densité.

(c) Montrer que si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$ ayant une densité, alors $A \cup B$ possède une densité, égale à $\delta(A) + \delta(B)$.

Soit $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ majorée. Le but de la suite est de démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes.

(i) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$.

(ii) Il existe $A \subset \mathbb{N}$ de densité égale à 1 telle que $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in A}} u_n = 0$.

(d) On suppose (ii). Justifier sommairement qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et parcourant exactement l'ensemble des éléments de A, et vérifiant $\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = 0$. En traduisant cette propriété avec des ε et en coupant en trois la quantité $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$, montrer (i).

(e) On pose $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $\alpha_n = \sup_{p \geqslant n} S_p$ et donner sa limite quand n tend vers l'infini, puis montrer que $B = \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{\alpha_n}\}$ est de densité nulle. Conclure.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.21. (*10'*)*** *Suites sous-additives, suite. Cet exercice prolonge celui sur le lemme de Fekete vu en TD.* Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. Montrer que $u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra faire une récurrence forte en sommant toutes les relations $u_k \leqslant \sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Relations de comparaison, développements limités et asymptotiques

E-1.22. (*20'*)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'équation $x = n \ln x$ possède deux solutions $u_n < v_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour n assez grand.

(b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, et en déduire que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n$.

(c) Montrer que $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini, puis que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers l'infini.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.23. (*10'*)** Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_k \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_k = x_k$.

(b) Montrer que

$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2\pi k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

On pourra utiliser la relation usuelle $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Suites récurrentes de réels ou de complexes

E-1.24. (*15'*)** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter le module et l'argument de u, et en déduire la nature de u.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Suites d'un espace vectoriel normé, suites extraites, valeurs d'adhérence

E-1.25. (*20'*)** *Théorème de Cesàro.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$ une suite convergente et ℓ sa limite. On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que v converge vers ℓ. On pourra commencer par étudier le cas $\ell = 0$, et couper en deux la quantité $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(b) Étudier la réciproque de ce résultat.

(c) Montrer la réciproque de ce résultat lorsque u est à valeurs réelles et croissante.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.26. (*10'*)** Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in E^{\mathbb{N}^2}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = \lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ existe dans E, et telle que $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$ existe dans E. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{n,\varphi(n)}$ converge vers ℓ. On pourra revenir à la définition de la convergence de $(u_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_n et introduire une « suite de ε ».

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.27. (*15'*)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}).$$

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$

(a) Montrer que v est croissante.

(b) Montrer que u est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.28. (*15'*)** *Lemme des pics.*

(a) Montrer que toute suite réelle possède une sous-suite monotone. On pourra considérer $A = \{n \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n, u_p \leqslant u_n\}$.

(b) Donner une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.29. (*20'*)*** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, et $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.

(a) Justifier que si u n'est pas convergente, alors elle possède au moins deux valeurs d'adhérence $a < b$.

(b) Montrer que u est convergente. On pourra utiliser (voir TD) le fait que l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ entraîne que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.30. (*N'*)*** Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leqslant a_0 \leqslant b_0 \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad b_{n+1} = \int_0^1 \max(x, a_n)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1-(1-b_n)^2}{2}$, $b_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En posant $c_n = 1 - b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier les suites $(a_{4n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{4n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $p \in [\![0,3]\!]$. En déduire les limites de a et b.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Suites de Cauchy, complétude

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si et seulement si elle vérifie la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geqslant q \geqslant n_0 \Rightarrow \mathrm{d}(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

Un espace vectoriel normé est *complet* si et seulement si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.

En préalable à tous les exercices ci-dessous, il est nécessaire d'aborder l'exercice correspondant de votre feuille de TD, qui montre la complétude de $\mathbb{R}$, puis celle de tout espace vectoriel normé de dimension finie.

E-1.31. (*5'*)* Soient E un espace vectoriel normé et $(u,v) \in (E^{\mathbb{N}})^2$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - v_n\| = 0$. Montrer que si u est de Cauchy, alors v est de Cauchy. On utilisera à bon escient l'inégalité triangulaire.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.32. (*5'*)* En choisissant bien ε dans la définition d'une suite de Cauchy, montrer directement que toute suite de Cauchy d'entiers relatifs est convergente sans utiliser la complétude de $\mathbb{R}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.33. (*5'*)**
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

(a) Montrer que u est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle est convergente.

(b) *Application* : montrer que la suite définie par la relation de récurrence $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n u_n^2}$ est convergente.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.34. (*10'*)** Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente dans E. Pour la réciproque, on raisonnera par l'absurde et on extraiera une sous-suite d'une suite de Cauchy divergente.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.35. (*10'*)** Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}.$$

Montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que u converge.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.36. (*10'*)** *Un espace vectoriel normé non complet.* Soit $E = \mathbb{C}[X]$. À $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$, on associe $\|P\| = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.

(a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

(b) Montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{2^k}$ est de Cauchy.

(c) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente en introduisant le degré d de sa limite Q éventuelle et en considérant $\|P_n - Q\|$ pour $n > d$. Conclure.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.37. (*15'*)*** Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$ et n_0 correspondant, on pourra constater que les moyennes à partir du rang n_0 sont proches de u_{n_0}, et injecter u_{n_0} dans $\|v_p - v_q\|$ pour p et q assez grands.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-1.38. (*25'*)*** *Nombre de rotation d'un homéomorphisme du cerle.* Soit F une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et telle que $F-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ soit périodique de période 1. On note $F^n = F\circ\ldots\circ F$ (n fois) pour $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x-y|<1 \Rightarrow |F(x)-F(y)|<1$. En déduire que s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F^n(t)}{n}$ existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F^n(u)}{n}$ existe et vaut ρ pour tout $u\in\mathbb{R}$.

(b) On suppose qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ et $(m,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$ tel que $F^m(x)=x+k$. Montrer que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F^n(t)}{n}$ existe pour tout $t\in\mathbb{R}$ et vaut $\dfrac{k}{m}$. On effectuera la division euclidienne d'un entier n donné par m.

(c) Montrer, en toute généralité, que

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{F^n(t)}{n}$$

existe et est indépendante de $t\in\mathbb{R}$. On montrera que la suite $\left(\dfrac{F^n(0)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

Si l'on pose $f : t\mapsto \mathrm{e}^{2i\pi F(t)}$, alors on constate que f est une bijection bi-continue de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ (un homéomorphisme du cercle). ρ représente alors la « rotation moyenne » subie par les points de $\mathbb{U}$ lorsqu'on applique f, d'où son nom de « nombre de rotation ».

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

1. Espaces vectoriels normés - Exercices (corrigés)

Normes, équivalence

E-1.1. On a d'une part
$$\|x-y\|+\|y-z\| \geqslant \|(x-y)-(y-z)\| = \|x+z-2y\| = 3\|y\|$$
en utilisant $x+z=-y$, et de même
$$\|x-y\|+\|z-x\| \geqslant 3\|x\|$$
$$\|y-z\|+\|z-x\| \geqslant 3\|z\|$$
ce qui donne en sommant
$$2(\|x-y\|+\|y-z\|+\|z-x\|) \geqslant 3(\|x\|+\|y\|+\|z\|)$$
comme voulu en divisant par 2.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.2. (a) Pour tout $(x,y)\in E^2$, il est clair que $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$. Si $\mathrm{d}(x,y)=0$, alors $\dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}=0$ donc $\|x-y\|=0$ et $x=y$. La réciproque est immédiate.

On montre par une étude facile que $f : x\mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $(x,y,z)\in E^3$, comme
$$\|x-y\| \leqslant \|x-z\|+\|y-z\|$$
il vient
$$\frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|} \leqslant \frac{\|x-z\|+\|y-z\|}{1+\|x-z\|+\|y-z\|} = \frac{\|x-z\|}{1+\|x-z\|+\|y-z\|}+\frac{\|y-z\|}{1+\|x-z\|+\|y-z\|} \leqslant \frac{\|x-z\|}{1+\|x-z\|}+\frac{\|y-z\|}{1+\|y-z\|}$$
c'est-à-dire
$$\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(y,z)$$
et d est bien une distance sur $\mathscr{E}$.

(b) Si d était associé à une norme, celle-ci serait
$$N : x\mapsto \mathrm{d}(x,0) = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}.$$
Or, pour $x\in E$ de norme 1, on a par exemple
$$N(2x) = \frac{\|2x\|}{1+\|2x\|} = \frac{2}{3} \neq 2\|x\|$$
si bien que N n'étant pas homogène, n'est pas une norme.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.3. Soient $A=E_{1,1}$, et $B=E_{2,2}$, alors $AB=0$ si bien que $0=\|AB\|\neq\|A\|\,\|B\|>0$ pour tout norme $\|.\|$ puisque A et B ne sont pas nulles.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.4. L'application $P\mapsto \|P\| = \sup\limits_{z\in\overline{D}(0,1)} |P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$: homogénéité et inégalité triangulaire découlent directement des propriétés de la norme ∞ sur $\mathscr{C}(\overline{D}(0,1),\mathbb{C})$, et si $P\in\mathbb{C}_n[X]$ vérifie $\|P\|=0$, alors $P(z)=0$ pour tout $z\in\overline{D}(0,1)$ et donc $P=0$ car il possède une infinité de racines. De même, si on note $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k$ la décomposition de $P\in\mathbb{C}_n[X]$ sur la base canonique, l'application $P\mapsto\|P\|_c=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k|$ est également une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$. Comme $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie, elles sont équivalentes, et en particulier, il existe $b>0$ tel que pour tout $P\in\mathbb{C}_n[X]$, $\|P\|\geqslant b\|P\|_c$.

Si $P\in U_n$, alors P possède en particulier un coefficient égal à 1, et donc $\|P\|_c\geqslant 1$. On a donc
$$\|P\| = \sup_{z\in\overline{D}(0,1)} |P(z)| \geqslant b\|P\|_c \geqslant b$$
pour tout $P\in U_n$, puis $\inf\limits_{P\in U_n}\left(\sup\limits_{z\in\overline{D}(0,1)}|P(z)|\right)\geqslant b>0$ par passage à la borne inférieure.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.5. (a) ∗ *Séparation.* Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $N(x,y)=0$. On a alors $x+ty=0$ pour tout $t\in[0,1]$. Le polynôme $x+Xy$ a donc une infinité de racines et est nul, et donc ses coefficients x et y sont nuls.

∗ *Homogénéité.* Par homogénéité de la borne supérieure, on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$
$$N(\lambda(x,y)) = \sup_{t\in[0,1]}|\lambda x+t\lambda y| = \sup_{t\in[0,1]}|\lambda|\,|x+ty| = |\lambda|\sup_{t\in[0,1]}|x+ty| = |\lambda|N(x,y).$$

∗ *Inégalité triangulaire.* Soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $t \in [0, 1]$

$$|(x + x') + t(y + y')| \leqslant |x + ty| + |x' + ty'| \leqslant N(x, y) + N(x', y')$$

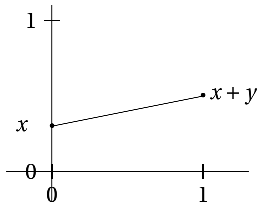
si bien que

$$N((x, y) + (x', y')) = N(x + x', y + y') \leqslant N(x, y) + N(x', y')$$

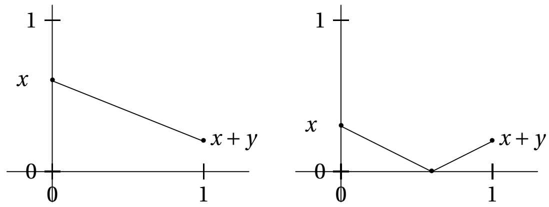
par passage à la borne supérieure.

N est donc bien une norme sur $\mathbb{R}^2$: représentons sa sphère unité. Par symétrie, on étudie le cas $x \geqslant 0$. On trace l'allure du graphe de $t \mapsto |x + ty|$ selon les valeurs de y.

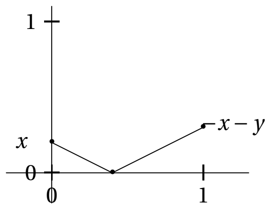
∗ Si $y \geqslant 0$, on obtient $N(x, y) = x + y$.



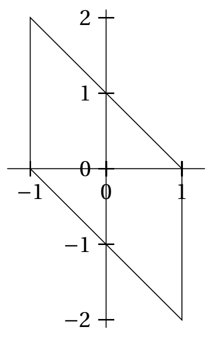
∗ Si $0 > y \geqslant -x$ ou $-x > y \geqslant -2x$, on a $N(x, y) = x$.



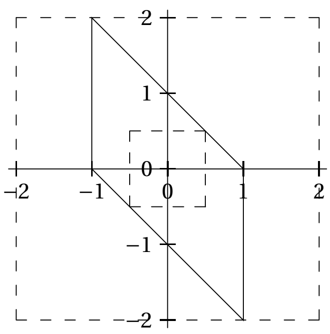
∗ Si $-2x > y$, il vient enfin $N(x, y) = -x - y$.



On obtient le dessin suivant pour la boule unité de N.

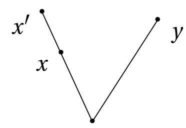


(b) On obtient graphiquement $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 2$ en traçant les boules de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et 2 pour la norme ∞.



Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.6. Supposons par exemple que $\|x\| \leqslant \|y\|$. Soit x' le vecteur porté par x de même norme que y, autrement dit $x' = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}x$.



Par inégalité triangulaire

$$\|x'-y\| \leqslant \|x'-x\|+\|x-y\| \iff \left\|\frac{\|y\|}{\|x\|}x-y\right\| \leqslant \left|\frac{\|y\|}{\|x\|}-1\right|\|x\|+\|x-y\| = \|y\|-\|x\|+\|x-y\| \leqslant 2\|x-y\|$$

par la seconde innégalité triangulaire. En factorisant à gauche par $\|y\| = \max(\|x\|,\|y\|)$, on obtient

$$\max(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant 2\|x-y\|$$

comme voulu. Le cas $\|y\| \leqslant \|x\|$ est symétrique.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.7. (a) $x \in \lambda B(a,r)$ si et seulement si $\frac{x}{\lambda} \in B(a,r)$, c'est-à-dire

$$\left\|\frac{x}{\lambda}-a\right\| \leqslant r \iff \|x-\lambda a\| \leqslant |\lambda| r$$

et donc $\lambda B(a,r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$.

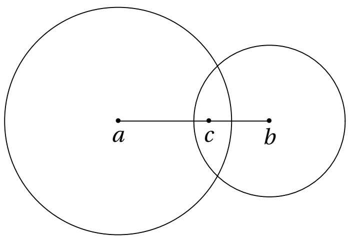
(b) Si $B(a,r)\cap B(b,s) \neq \emptyset$, il existe $c \in B(a,r)\cap B(b,s)$ et donc

$$\|a-b\| \leqslant \|a-c\|+\|c-b\| < r+s.$$

Réciproquement, si $\|a-b\| < r+s$, alors en prenant $c = \frac{s}{r+s}a+\frac{r}{r+s}b$, on a

$$\|a-c\| = \left\|a-\frac{s}{r+s}a+\frac{r}{r+s}b\right\| = \frac{r}{r+s}\|a-b\| < r$$

donc $c \in B(a,r)$, et $c \in B(b,s)$ de même.



(c) Si $x \in B(a,r)+B(b,s)$, il existe $y \in B(a,r)$ et $z \in B(b,s)$ tels que $x = y+z$ et donc

$$\|x-(a+b)\| = \|y-a+z-b\| \leqslant \|y-a\|+\|z-b\| < r+s$$

et donc $x \in B(a+b, r+s)$.

Réciproquement, soit $x \in B(a+b,r+s)$. Il existe (u,v) tels que $u \in [0,r[$, $v \in [0,s[$ et $u+v = \|x-a-b\|$. On pose alors $y = a+u\frac{x-a-b}{\|x-a-b\|}$ et on a $x = y+z$ avec $z = x-y$. D'une part

$$\|y-a\| = u < r$$

et d'autre part

$$\|z-b\| = \left\|x-a-b-u\frac{x-a-b}{\|x-a-b\|}\right\| = \|x-a-b\|\left|1-\frac{u}{\|x-a-b\|}\right| = v < s$$

de sorte que $x \in B(a,r)+B(b,s)$.s

(d) Le sens réciproque est trivial. Supposons $B(a,r) = B(b,s)$. Si $r < s$, on considère un vecteur e de norme 1 quelconque, et on pose $c = b+\frac{r+s}{2}e$ et $d = b-\frac{r+s}{2}e$. D'une part, c et d sont dans $B(b,s)$ puisque leur distance à b est $\frac{r+s}{2} < s$, et d'autre part, $\|c-d\| = r+s > 2r$, ce qui montre qu'ils ne sont pas dans une même boule de rayon r, donc en particulier pas tous les deux dans $B(a,r)$, si bien que $B(a,r) = B(b,s) \Rightarrow r \geqslant s$ par contraposée, puis $r = s$ par symétrie des rôles.

Si $a \neq b$, on constate que $c = b+\frac{r+\|b-a\|}{2}(b-a)$ est dans $B(b,r)$ mais pas dans $B(a,r)$, et on conclut de même.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.8. Soit g constante sur $[0,1]$, égale à $\frac{1}{2}$. $g \in A$ et $\mathrm{d}(f,g) = \frac{1}{2}$ si bien que $\mathrm{d}(f,A) \leqslant \frac{1}{2}$.

Réciproquement, on considère $g \in A$. Si $g\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on a $\|f-g\|_\infty \geqslant |f(x)-g(x)| = |g(x)|$ d'où

$$\|f-g\|_\infty \geqslant \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} |g(x)| = \left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| > \frac{1}{2}$$

et donc $\|f-g\|_\infty > \frac{1}{2}$. Si $g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$, on a de même $\|f-g\|_\infty \geqslant |f(x)-g(x)| = 1-g(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $1-g(x) \underset{x \to \frac{1}{2}^-}{\longrightarrow} 1-g\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$. Finalement, $\mathrm{d}(f,A) \geqslant \frac{1}{2}$ dans tous les cas et donc $\mathrm{d}(f,A) \geqslant \frac{1}{2}$ puis l'égalité.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.9. On commence par éliminer tous les vecteurs nuls de la famille sans perte de généralité. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on note $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$. On répartit ensuite les vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ en les regroupant selon le plus petit indice $j \in [\![1,n]\!]$ où ils atteignent leur norme ∞, et le signe de la coordonnée correspondante. Formellement, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note K_j l'ensemble de tous les $k \in [\![1,p]\!]$ tels que $\|x_k\| = x_{k,j}$ et $\|x_k\| > |x_{k,\ell}|$ pour tout $\ell \in [\![1, j-1]\!]$, et de même L_j l'ensemble de tous les $k \in [\![1,p]\!]$ tels que $\|x_k\| = -x_{k,j}$ et $\|x_k\| > |x_{k,\ell}|$ pour tout $\ell \in [\![1, j-1]\!]$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i\| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i \in K_j} x_{i,j} - \sum_{i \in L_j} x_{i,j}\right).$$

Ayant ainsi regroupé tous les vecteurs dont la coordonnée la plus grande était située au même indice et avec le même signe, la plus grande coordonnée de la somme de ces vecteurs est nécessairement toujours positionnée à cet indice, autrement dit, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\sum_{i \in K_j} x_{i,j} = \left\|\sum_{i \in K_j} x_i\right\| \text{ et } -\sum_{i \in L_j} x_{i,j} = \left\|\sum_{i \in L_j} x_i\right\|.$$

Considérant alors celui des ensembles K_j ou L_j maximisant cette quantité, et en le notant J, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\left\|\sum_{i \in J} x_i\right\| + \left\|\sum_{i \in J} x_i\right\|\right) = 2n \left\|\sum_{i \in J} x_i\right\|$$

ce qui donne bien le résultat annoncé par passage à la borne supérieure.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Bornes inférieure et supérieure

E-1.10. Soit $x = a+b \in A+B$, alors $x \leqslant \sup A + \sup B$. On en déduit que $A+B$ est majoré par $\sup A + \sup B$, et en outre que $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $\sup A - \varepsilon \leqslant a$ et $\sup B - \varepsilon \leqslant b$, donc $\sup A + \sup B - 2\varepsilon \leqslant a+b \leqslant \sup(A+B)$. On a donc $\sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$ en faisant tendre ε vers 0 et l'égalité.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.11. Si $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: précisément, $n = \left\lfloor \frac{\pi}{3\alpha} \right\rfloor + 1$ convient. On a donc $|\sin(n\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$, on a immédiatement $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)| \geqslant |\sin\alpha| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin n\alpha| = |\sin(n\pi - n\alpha)| = |\sin n(\pi - \alpha)|$, ce qui ramène au premier cas puisque $\pi - \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$. On a donc $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, et cette valeur est manifestement atteinte pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.12. Par parité, on a l'expression pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{d}_n = \inf_{x \in \mathbb{R}_+} \sqrt{x^2 + \cos^{2n} x}.$$

En particulier $d_n \geqslant 0$, et

$$d_n \leqslant \sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} + \cos^{2n} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}}.$$

Or

$$\cos^{2n} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = \exp\left(2n \ln\left(\cos \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right)$$

et

$$\ln\left(\cos \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right) = \ln\left(1 + \cos \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \cos \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

de sorte que $\lim_{n\to+\infty} 2n\ln\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right) = -\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\cos^{2n}\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$. Finalement, par le théorème d'encadrement, (d_n) converge vers 0.

Soit $\varphi_n : x \mapsto \sqrt{x^2+\cos^{2n}x}$: on a $d_n = \inf_{x\in\mathbb{R}}\varphi_n(x)$. φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[0,1]$: notons $x_n \in [0,1]$ tel que $\varphi_n(x_n) = \inf_{x\in[0,1]}\varphi_n(x)$. Comme

$$\varphi_n(x) = \sqrt{x^2+\cos^{2n}x} \geqslant x$$

on a en particulier $\varphi_n(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 1$, et comme d_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a

$$d_n = \inf_{x\in\mathbb{R}_+}\varphi_n(x) = \inf_{x\in[0,1]}\varphi_n(x) = \varphi_n(x_n).$$

Comme $x_n \leqslant \varphi_n(x_n) = d_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n tend vers 0. Comme c'est un point où φ_n, qui est dérivable, atteint son minimum, on doit avoir

$$\varphi_n'(x_n) = 0 = \frac{x_n - n\sin(x_n)\cos^{2n-1}x_n}{\sqrt{x_n^2+\cos^{2n}x_n}}$$

d'où

$$x_n = n\sin x_n\cos^{2n-1}x_n.$$

Comme x_n tend vers 0, $\sin x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, et il vient

$$\cos^{2n-1}x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

puis par composition par le logarithme

$$(2n-1)\ln(\cos x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n.$$

Or

$$(2n-1)\ln(\cos x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln(1+\cos x_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n(\cos x_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n\frac{x_n^2}{2}$$

d'où

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}.$$

Enfin, on a vu que $\cos^{2n-1}x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ d'où

$$\cos^{2n}(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

puisque $\cos(x_n)$ tend vers 1, de sorte que $\cos^{2n}(x_n) = o(x_n^2)$ et enfin

$$d_n = \sqrt{x_n^2+\cos^{2n}(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}.$$

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Suites de réels

E-1.13. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0 \iff \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+1} \geqslant u_{n+1}$$

et on note qu'on sait que $v_0 \geqslant u_0$. Il vient pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_nv_n}-u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}) \geqslant 0$$

donc u est croissante, et

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_n-v_n}{2} \leqslant 0$$

si bien que v est décroissante. u est donc majorée par v_0, v minorée par u_0, et elles sont donc toutes les deux convergentes. En notant $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$ toutes deux positives, il vient

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_nv_n} = \sqrt{\ell\ell'}$$

si bien que $\sqrt{\ell} = \sqrt{\ell'}$ et donc $\ell = \ell'$ puisqu'elles sont positives. u et v sont donc adjacentes.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.14. (a) On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $u_n = \frac{H_n}{n}$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{H_{n+1}}{n+1} - \frac{H_n}{n} = \frac{H_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{H_n}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{H_n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{H_n}{n}\right).$$

Comme $H_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+1} - \frac{H_n}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. u est donc décroissante.

(b) On a par récurrence facile que u_n est bien définie et positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + n - u_n^2.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $-x^2 + x + n \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$. Montrons par récurrence que $u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$ et si on suppose que c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors

$$u_{n+1}^2 = u_n + n \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}+2n}{2}.$$

Or

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+1)}}{2}\right)^2 = \frac{1+1+4n+4+2\sqrt{5+4n}}{4} = \frac{3+2n+\sqrt{5+4n}}{2} \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4n}+2n}{2} \geqslant u_{n+1}^2$$

si bien que

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4(n+1)}}{2}$$

par positivité de u_{n+1}. Ceci montre l'hérédité et achève la récurrence. On en déduit

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

et u est croissante.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.15. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha.$$

Si $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\alpha)$ existe et vaut ℓ, comme $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\sin\alpha \neq 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha) = \ell\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

existe également. On montre de même que si $\cos(n\alpha)$ converge, alors $\sin(n\alpha)$ aussi.

Supposons qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement : en passant à la limite dans $\cos^2(n\alpha)+\sin^2(n\alpha) = 1$, il vient $\ell^2+\ell'^2 = 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \cos\theta$ et $\ell' = \sin\theta$. En passant à la limite dans $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha$, il vient

$$\sin\theta = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha)$$

et de même

$$\cos\theta = \cos(\theta+\alpha)$$

ce qui impose $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ et est donc exclu.

(b) Supposons qu'elle converge et notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n)+1}{1-\tan(n)\tan(1)}$$

d'où

$$\ell = \frac{\ell+1}{1-\tan(1)\ell}$$

en faisant tendre n vers l'infini. Il vient

$$-\tan(1)\ell^2 = 1$$

ce qui est absurde car $0 < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(1) > 0$ et donc $-\tan(1)\ell^2 \leqslant 0$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.16. Pour tout $A > 0$, l'ensemble $M_A = \{k \in \mathbb{N}, k \leqslant A\}$ est majoré par $\lfloor A \rfloor$ et contient donc un nombre fini de termes de la suite u : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \notin M_A$$

ou encore

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$

si bien que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.17. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{(n+1)!n(n+1)} \leqslant 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\,n!} = 0$$

si bien que u est croissante, v décroissante et $v - u$ tend vers 0. u et v sont donc adjacentes, de limite commune e d'après l'énoncé.

(b) On sait que $\mathrm{e} > 0$. Supposons que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La croissance de u comme la décroissance de v étant strictes, on a en particulier par adjacence

$$u_q < \mathrm{e} < v_q$$

et en multipliant cette inégalité par $q! > 0$

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < (q-1)!p < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q} \leqslant \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1.$$

Comme $k!$ divise $q!$ pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, $N = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier naturel. On en déduit que l'entier naturel $(q-1)!p$ est strictement compris entre N et $N+1$, deux entiers naturels consécutifs. Ceci est absurde, et $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.18. (a) Si $\ell = 0$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $u_{n+1} \leqslant \varepsilon u_n$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, donc $u_n \leqslant \varepsilon^{n-n_0} u_{n_0}$ par une récurence facile pour $n \geqslant n_0$, ce qui montre que u converge vers 0 par majoration. On procède de même si $\ell = +\infty$. Dans les autres cas où $\ell \neq 1$, on aboutit par continuité du logarithme à

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln(u_n) = \ln(\ell) \iff \ln(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln(\ell)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = -\infty$$

si $\ell < 1$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = +\infty$$

si $\ell > 1$. On conclut par continuité de l'exponentielle.

(b) Si $\ell = 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \varepsilon \iff 0 < u_{n+1} \leqslant \varepsilon u_n$$

et donc par récurrence pour tout $n \geqslant n_0$

$$0 < u_n \leqslant \varepsilon^{n-n_0} u_{n_0}$$

puis

$$0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant \varepsilon \left(\frac{u_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, il existe $n_1 > n_0$ tel que $n \geqslant n_1$ implique $\left(\frac{u_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 2$ et donc

$$0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $\sqrt[n]{u_n}$ converge bien vers 0. De même, si $\ell = +\infty$, pour tout $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel

$$u_{n+1} \geqslant A u_n$$

puis

$$u_n \geqslant A^{n-n_0} u_{n_0}$$

d'où

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant A \left(\frac{u_{n_0}}{A^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

et enfin un rang $n_1 > n_0$ tel que $n \geqslant n_1$ implique
$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant \frac{A}{2}$$
ce qui conclut. Enfin, si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\varepsilon \in]0,\ell[$: il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique
$$(\ell-\varepsilon)u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant (\ell+\varepsilon)u_n$$
puis on aboutit de même à
$$(\ell-\varepsilon)\left(\frac{u_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant (\ell+\varepsilon)\left(\frac{u_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}}$$
et on conclut de même.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.19. Supposons qu'il n'y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) \leqslant n$, et soit n_0 le plus grand d'entre eux. Alors $f(n) > n$ pour tout $n \geqslant n_0+1$ et donc en particulier l'ensemble des antécédants de $[\![0, n_0+1]\!]$ doit être inclus dans $[\![0, n_0]\!]$, ce qui est absurde pour raisons de cardinalité.

Supposons de même qu'il n'existe qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) \geqslant n$, et notons n_0 le plus grand d'entre eux, si bien que $f(n) < n$ pour tout $n \geqslant n_0+1$. En notant $n_1 = \max(f([\![0,n_0]\!]))$, et $N = \max(n_0, n_1)+1$, on a pour tout $n \in [\![0,N]\!]$: soit $n \leqslant n_0$ et $f(n) \leqslant n_1 < N$, soit $n > n_0$ et donc $f(n) < n \leqslant N$, autrement dit $f([\![0,N]\!]) \subset [\![0,N-1]\!]$ ce qui est de nouveau absurde.

Il existe donc deux suites strictement croissantes $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $f(\varphi_n) \leqslant \varphi_n$ et $f(\psi_n) \geqslant \psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à la limite dans les quotients $\dfrac{f(\varphi_n)}{\varphi_n}$ et $\dfrac{f(\psi_n)}{\psi_n}$, on aboutit respectivement à $\ell \leqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ d'où $\ell = 1$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.20. (a) Pour $A = a\mathbb{N}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{Card}(A \cap [\![0,n]\!]) = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{a}$$
de sorte que $\delta(A)$ existe et vaut $\delta(A) = \dfrac{1}{a}$. De même, pour $A = \{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $a \geqslant 2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\mathrm{Card}(A \cap [\![0,n]\!]) = \lfloor \log_a(n) \rfloor + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln a}$$
si bien que $\delta(A) = 0$.

(b) Posons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![2^{2n}, 2^{2n+1}-1]\!]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{Card}(A \cap [\![0, 2^{2n+1}-1]\!]) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\left([\![2^{2k}, 2^{2k+1}-1]\!]\right) = \sum_{k=0}^{n} 4^k = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$
et
$$\mathrm{Card}(A \cap [\![0, 2^{2n+2}-1]\!]) = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$
également, si bien qu'en posant $u_n = \dfrac{\mathrm{Card}(A \cap [\![0,n]\!])}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{2^{2n+1}-1} = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{4^{n+1}-1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+2}}{3\times 2^{2n+1}} = \frac{2}{3}$$
tandis que
$$u_{2^{2n+2}-1} = \frac{1}{2^{2n+2}}\frac{4^{n+1}-1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$
de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite puisqu'elle a deux valeurs d'adhérence distinctes. On en conclut que A n'a pas de densité.

(c) Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$ ayant une densité, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{Card}((A\cup B) \cap [\![0,n]\!]) = \mathrm{Card}(A \cap [\![0,n]\!]) + \mathrm{Card}(B \cap [\![0,n]\!])$$
si bien que $A \cup B$ possède une densité, égale à $\delta(A) + \delta(B)$.

(d) Supposons (ii), et posons $B = A^c$. Remarquons que $\delta(A) = 1$ implique que A est infini : il existe alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et parcourant exactement l'ensemble des éléments de A, et vérifiant donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = 0.$$
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant \varphi(n_0)$, on a alors

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n_0)-1} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\in A}}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\notin A}}^{n} u_k.$$

Le premier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini et il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(n_0)-1} u_k \leqslant \varepsilon$. Par définition de n_0

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\in A}}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\in A}}^{n} \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

et enfin

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\notin A}}^{n} u_k \leqslant \frac{\operatorname{Card} B\cap [\![0,n]\!]}{n+1}\|u\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta(B).$$

Or, $\delta(A\cup B) = \delta(A)+\delta(B) = \delta(\mathbb{N}) = 1$, donc $\delta(B) = 0$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_2 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{\substack{k=\varphi(n_0)\\ k\notin A}}^{n} u_k \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, on a donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = 0.$$

Supposons (i). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut alors poser pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \sup_{p\geqslant n} S_p$$

qui tend également vers 0 quand n tend vers l'infini : le but est de définir une partie B de $\mathbb{N}$ regroupant les indices n tels que u_n soit beaucoup plus grand que α_n : on pose précisément

$$B = \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{\alpha_n}\}$$

et $A = B^{\mathrm{c}}$. Il est clair que

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in A}} u_n = 0$$

puisque $u_n < \sqrt{\alpha_n}$ pour tout $n \in A$. Montrons que $\delta(B) = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=0\\ k\in B}}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{k=0\\ k\in B}}^{n} \sqrt{\alpha_k} \geqslant \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n+1}\sum_{\substack{k=0\\ k\in B}}^{n} 1 = \sqrt{\alpha_n}\frac{\operatorname{Card}(B\cap [\![0,n]\!])}{n+1}$$

et donc

$$\frac{\operatorname{Card}(B\cap [\![0,n]\!])}{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\alpha_n = \sqrt{\alpha_n}$$

de sorte que $\delta(B)$ existe et vaut bien 0. On a alors $\delta(A) = \delta(\mathbb{N}) - \delta(B) = 1$ comme voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.21. On raisonne par récurrence forte, la propriété étant évidente pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n avec $n \geqslant 1$. On a alors $u_k \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ d'où par sommation de toutes ces inégalités puis permutation de sommes

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-\ell}{\ell} u_\ell = (n+1)\sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell.$$

On en tire, en notant que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell = \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}$

$$(n+1)\sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} (u_k + u_{n+1-k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = n u_{n+1}.$$

En ajoutant u_{n+1} des deux côtés et en divisant par $n+1$, il vient bien

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{u_\ell}{\ell} \geqslant u_{n+1}$$

ce qui clôt la récurrence.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

Relations de comparaison, développements limités et asymptotiques

E-1.22. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x - n \ln x$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^1, avec

$$f_n' : x \mapsto 1 - \frac{n}{x}.$$

f_n est donc décroissante sur $]0, n]$ puis croissante sur $[n, +\infty[$. De plus, $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$ dès que $n > \mathrm{e}$ donc $n \geqslant 3$. On en déduit que f_n s'annule en deux points $u_n \in]0, n[$ et $v_n \in]n, +\infty[$ dès que $n \geqslant 3$.

(b) On a $v_n > n$ pour tout $n \geqslant 3$ avec ce qui précède d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. On a en outre

$$v_n = n \ln v_n$$

d'où $\ln(v_n) = \ln n + \ln(\ln v_n)$. Comme v_n diverge vers $+\infty$, $\ln(v_n) = o(v_n)$ donc $\ln(\ln v_n) = o(\ln v_n)$ si bien que

$$\ln(v_n) - \ln n = o(\ln(v_n))$$

et donc $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$, puis avec $v_n = n \ln v_n$

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n.$$

(c) On a $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - n < 0$ dès que $n \geqslant 3$ et les variations de f_n imposent que $u_n \in [1, \mathrm{e}]$. Comme

$$\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 0$ donc u converge vers 1.

On a alors de même

$$\ln(u_n) = \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis en réitérant

$$\ln(u_n) = \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

« et ainsi de suite » si on le souhaite...

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-1.23. (a) On vérifie facilement que $x \mapsto \tan x - x$ réalise une bijection entre chacun de ces intervalles et $\mathbb{R}$, donc que $\{0\}$ possède un unique antécédant x_k par cette fonction dans $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) On sait que $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$, si bien que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x_k}.$$

Comme $k\pi - \dfrac{\pi}{2} < x_k < k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x_k \underset{k \to +\infty}{\sim} k\pi$$

et donc

$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k\pi}\right)$$

puis

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{x_k} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k\pi}\left(1 + \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{-1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{2\pi k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

d'où, en utilisant le fait que quand x tend vers 0, $\operatorname{Arctan} x = x + o(x^2)$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{x_k} = \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{2\pi k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

et finalement

$$x_k \underset{k\to+\infty}{=} k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2\pi k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

comme voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Suites récurrentes de réels ou de complexes

E-1.24. Pour n, on pose $u_n = r_n e^{i\theta_n}$ où $r_n = |u_n|$ et θ_n est l'unique argument de u_n dans $]-\pi,\pi]$.

On constate que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît par inégalité triangulaire, donc converge. On a alors

$$r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} = \frac{r_n}{2}\left(e^{i\theta_n}+1\right) = r_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)e^{i\frac{\theta_n}{2}}.$$

Comme $\theta_n \in]-\pi,\pi]$, $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \geqslant 0$ et donc

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \\ \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}. \end{cases}$$

On en déduit que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ converge vers 0. u converge donc vers un réel positif ou nul.

* Si $u_0 \in \mathbb{R}_+$, alors u est stationnaire à u_0.
* Si $u_0 \in \mathbb{R}_-$, alors u est stationnaire à 0.
* Si $u_0 \notin \mathbb{R}$, alors on a par une récurrence facile

$$r_n = r_0\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

puis

$$r_n\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \frac{r_0}{2^n}\sin(\theta_0)$$

et donc

$$r_n = \frac{r_0}{2^n\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}\sin(\theta_0)$$

qui tend vers $\frac{r_0\sin\theta_0}{\theta_0}$, qui est aussi la limite de u.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Suites d'un espace vectoriel normé, suites extraites, valeurs d'adhérence

E-1.25. (a) On suppose $\ell = 0$, et on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leqslant \varepsilon$. On a alors pour $n \geqslant n_0$

$$\|v_n\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|u_k\| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}\|u_k\| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\|u_k\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}\|u_k\| + \frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{n}.$$

Or

$$\frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{n} \leqslant \varepsilon$$

et comme $\sum_{k=1}^{n_0-1}\|u_k\|$ est indépendant de n, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}\|u_k\|$ tend vers 0 et il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}\|u_k\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a donc $\|v_n\| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Dans le cas général, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)$$

ce qui ramène au cas précédent en posant $u'_n = u_n - \ell$ et $v'_n = v_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $u_n = (-1)^n$, on a $v_n = -\dfrac{1}{n}$ si n est impair et $v_n = 0$ sinon. v converge donc vers 0 tandis que u n'a pas de limite.

(c) Supposons u à valeurs réelles et croissante, et supposons que v converge vers ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part

$$v_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n = u_n$$

et d'autre part,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2v_{2n} - v_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2v_{2n} - v_n = \ell$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.26. Par définition de la convergence de $(u_{0,p})_{p\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_0, il existe un rang, noté $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$p \geqslant \varphi(0) \Rightarrow \|u_{0,p} - \ell_0\| \leqslant 1.$$

De même, il existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}$, que l'on peut choisir strictement supérieur à $\varphi(0)$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$p \geqslant \varphi(1) \Rightarrow \|u_{1,p} - \ell_1\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons construits $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ tels que pour tout $(k,p) \in [\![0,n]\!] \times \mathbb{N}$

$$p \geqslant \varphi(k) \Rightarrow \|u_{k,p} - \ell_k\| \leqslant 2^{-k}.$$

Par définition de la convergence de $(u_{n+1,p})_{p\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_{n+1}, il existe $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$p \geqslant \varphi(n+1) \Rightarrow \|u_{n+1,p} - \ell_{n+1}\| \leqslant 2^{-n-1}.$$

L'extractrice φ est ainsi construite par récurrence et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_{n,\varphi(n)} - \ell_n\| \leqslant 2^{-n}$$

donc

$$\|u_{n,\varphi(n)} - \ell\| \leqslant 2^{-n} + \|\ell - \ell_n\|$$

ce qui donne bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,\varphi(n)} = \ell$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.27. On étudie d'abord $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geqslant 0.$$

On en déduit que v est croissante. S'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} = a > 0$, alors $v_n \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$ et par sommation

$$u_n - u_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k \geqslant (n - n_0)a$$

d'où une contradication avec le caractère majoré de u. On en déduit qu'un tel rang n_0 n'existe pas, donc que v reste négative ou nulle, donc enfin que u est décroissante, puis convergente car minorée.

Autre idée intéressante même si plus longue. Comme v est croissante et u est bornée, v est bornée et donc convergente. On note alors ℓ sa limite.

u étant bornée, elle possède une valeur d'adhérence a : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $v_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc

$$u_{\varphi(n)+1} = v_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \ell.$$

On en déduit que $a+\ell$ est une valeur d'adhérence de u, puis par une récurrence immédiate que $a + k\ell$ est une valeur d'adhérence de u pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $\ell \neq 0$, par exemple $\ell > 0$, u étant bornée donc majorée par un certain réel M, on aboutit à une contradiction en considérant $k > \dfrac{M+1-a}{\ell}$ qui ferait de $a + k\ell \geqslant M+1$ une valeur d'adhérence de u. On en conclut que $\ell = 0$.

Comme v est croissante, elle est donc négative, de sorte que u est décroissante, et donc convergente car bornée.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.28. (a) Soit u une suite réelle. On considère les « pics », c'est-à-dire les termes de la suite plus grands que tous ceux qui les suivent. S'il existe une infinité de tels pics, ils forment une suite décroissante. Dans le cas contraire, on va construire par récurrence une sous-suite croissante.

Soit donc $A = \{n \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n, u_p \leqslant u_n\}$.

$*$ Si A est infini, on définit $\varphi(0) = \min(A)$, puis pour tout $k \geqslant 1$, $\varphi(k) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(k-1)\})$ (autrement dit, φ énumère les éléments de A dans l'ordre croissant). Par définition même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} \leqslant u_{\varphi(n)}$, et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$*$ Si A est fini, on considère $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(0) > \max A$ (on peut prendre $\varphi(0) = 0$ si $A = \varnothing$). Comme $\varphi(0) \notin A$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} > u_{\varphi(0)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ tels que $u_{\varphi(0)} < \ldots < u_{\varphi(n)}$. Comme $\varphi(n) > \varphi(0)$, $\varphi(n) \notin A$ et il existe donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} > u_{\varphi(n)}$. La sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite par récurrence est donc strictement croissante.

Dans tous les cas, u possède donc une sous-suite convergente.

(b) Soit u une suite bornée de réels : elle possède, d'après la question précédente, une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ monotone. Cette sous-suite étant également bornée est donc convergente, et u possède donc une valeur d'adhérence.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.29. On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle (voir TD). Supposons que u ne soit pas convergente. Étant bornée, elle possède alors au moins deux valeurs d'adhérence $a < b$. Tout $\ell \in [a, b]$ est encore une valeur d'adhérence de u, et il existe alors une extraction φ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

Cependant, f étant continue

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(\ell)$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} = 0$, on en déduit que $\ell = f(\ell)$. La restriction de f à $[a, b]$ est donc l'identité de $[a, b]$.

Comme en particulier $\dfrac{a+b}{2}$ est valeur d'adhérence de u, il existe un rang n tel que $u_n \in [a, b]$. Mais alors u est constante à partir de ce rang, donc convergente, ce qui contredit notre hypothèse.

On en déduit que u n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc qu'elle est convergente puisqu'elle est bornée.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.30. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \int_0^{b_n} x\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 b_n \mathrm{d}x = \frac{b_n^2}{2} + b_n(1-b_n) = \frac{2b_n - b_n^2}{2} = \frac{1-(1-b_n)^2}{2}$$

et

$$b_{n+1} = \int_0^{a_n} a_n \mathrm{d}x + \int_{a_n}^1 x\mathrm{d}x = a_n^2 + \frac{1-a_n^2}{2} = \frac{1+a_n^2}{2}.$$

En posant $c_n = 1 - b_n$, il vient en fait plus simplement

$$a_{n+1} = f(c_n) \qquad ; \qquad c_{n+1} = f(a_n)$$

avec

$$f : x \mapsto \frac{1-x^2}{2}.$$

Les quatre suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient alors la relation générique

$$u_{n+1} = (f \circ f)(u_n).$$

Il est clair en outre que $[0, 1]$ est stable par f et ces quatre suites sont donc toutes à valeurs dans $[0, 1]$. f étant décroissante sur $[0, 1]$, $f \circ f$ est croissante, si bien que nos quatre suites sont monotones, et étant bornées, convergentes, vers un point fixe de $f \circ f$. La recherche de ces points fixes amène à résoudre l'équation

$$f \circ f(x) = x \iff x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0.$$

Les points fixes de f sont facilement obtenus en résolvant $x^2 + 2x - 1 = 0$, ce qui donne $-1 \pm \sqrt{2}$. Ces deux valeurs sont aussi des points fixes de $f \circ f$ et l'on peut factoriser cette dernière équation par $x^2 + 2x - 1$, ce qui donne

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0.$$

Le second trinôme possède un discriminant strictement négatif, et finalement, le seul point fixe de $f \circ f$ dans l'intervalle $[0, 1]$ est $\sqrt{2} - 1$, qui est donc la limite commune des quatre suites. On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\sqrt{2} - 1$, et donc que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2 - \sqrt{2}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Suites de Cauchy, complétude

E-1.31. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q \geqslant n_0$ implique $\|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - v_n\| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\|v_p - v_q\| \leqslant \|v_p - u_p\| + \|u_p - u_q\| + \|u_q - v_q\| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qu'on voulait.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.32. À partir d'un rang n_0, u_n diffère de u_{n_0} de moins de $\dfrac{1}{2}$, donc est égal à u_{n_0}, et u est stationnaire.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.33. (a) Si $p > q$

$$\|u_p - u_q\| = \left\| \sum_{k=q}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) \right\| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^q} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^{q-1}}.$$

On en déduit immédiatement que u est de Cauchy.

(b) On montre par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que u est croissante, d'où $\|u_{n+1} - u_n\| = \dfrac{1}{2^n u_n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.34. Le sens direct a déjà été vu dans un exercice précédent. Supposons donc que E n'est pas complet et soit u une suite de Cauchy de E non convergente. Comme u est de Cauchy, il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $p > q \geqslant \varphi(0) \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant 1$, puis $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $p > q \geqslant \varphi(1) \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, *etc.* On construit ainsi une extraction φ telle que $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Si la suite $x_n = u_{\varphi(n)}$ était convergente, u aurait une valeur d'adhérence et on montrerait alors comme dans le TD que u converge, ce qui est contradictoire. (x_n) n'est donc pas convergente, ce qui achève la preuve par contraposée.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.35. On a avec les quantités conjuguées

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n+1}}} - \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}{u_{n+1} + u_n} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n+1}}} - \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}{2} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n+1}}} - \sqrt{3 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}{2(\sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n+1}}} + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}})} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{3 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n+1}}} - \sqrt{3 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}{2^2\sqrt{2}} = \ldots \\
&\leqslant \frac{\sqrt{n + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n}}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n-1}\sqrt{(n-1)!}(\sqrt{n + \sqrt{n+1}} + \sqrt{n})} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}
\end{aligned}$$

On a en particulier $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et on en conclut que u est de Cauchy (voir exercices précédents).

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.36. (a) C'est classique (voir TD).

(b) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p > q$. Alors

$$\|P_p - P_q\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{X^k}{2^k} \right\| = \max_{q+1 \leqslant k \leqslant p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q+1}}$$

dont on déduit immédiatement que (P_n) est de Cauchy.

(c) Supposons (P_n) convergente et soit Q sa limite. Comme $\|P_n\| = 1$, P ne converge pas vers 0. On note $d = \deg Q \in \mathbb{N}$. Soit $n > d$, alors le coefficient de degré $d+1$ de $P_n - Q$ est non nul et vaut $\dfrac{1}{2^{d+1}}$ si bien que

$$\|P_n - Q\| \geqslant \frac{1}{2^{d+1}}$$

ce qui est absurde en faisant tendre n vers l'infini.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.37. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p > q \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$. Notons d'abord que

$$\left\| \frac{1}{n - n_0 + 1} \sum_{k=n_0}^{n} u_k - u_{n_0} \right\| = \left\| \frac{1}{n - n_0 + 1} \sum_{k=n_0}^{n} (u_k - u_{n_0}) \right\| \leqslant \frac{1}{n - n_0 + 1} \sum_{k=n_0}^{n} \|u_k - u_{n_0}\| \leqslant \varepsilon.$$

Si $p > q \geqslant n_0$, il vient

$$\|v_p - v_q\| = \left\|\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{p+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k - u_{n_0} - \frac{1}{q+1}\sum_{k=n_0}^{q} u_k + u_{n_0}\right\|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\left\|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right\| + \left\|\frac{1}{p+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k - u_{n_0}\right\| + \left\|\frac{1}{q+1}\sum_{k=n_0}^{q} u_k - u_{n_0}\right\|.$$

Or, comme $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy et $\left\|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right\|$ indépendante de p et q, on peut majorer le premier terme par ε pour $p > q \geqslant n_1$ avec un certain $n_1 \in \mathbb{N}$. Ensuite, en utilisant la remarque préliminaire et le fait qu'une suite de Cauchy est bornée

$$\left\|\frac{1}{p+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k - u_{n_0}\right\| = \left\|\frac{1}{p+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k - \frac{1}{p-n_0+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k + \frac{1}{p-n_0+1}\sum_{k=n_0}^{p} u_k - u_{n_0}\right\|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{p-n_0+1} - \frac{1}{p+1}\right)\sum_{k=n_0}^{p}\|u_k\| + \varepsilon \leqslant \frac{n_0(p-n_0+1)}{(p+1)(p-n_0+1)}\|u\|_\infty + \varepsilon.$$

On peut encore choisir $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $p > q \geqslant n_2 \Rightarrow \dfrac{n_0(p-n_0+1)}{(p+1)(p-n_0+1)}\|u\|_\infty \leqslant \varepsilon$ puisque cette quantité tend vers 0 quand p tend vers l'infini. On procède de même avec le dernier terme et pour p et q assez grands, il vient

$$\|v_p - v_q\| \leqslant 4\varepsilon$$

ce qu'on voulait.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-1.38. (a) On a pour tout $(t,k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$

$$F(t+k) - (t+k) = F(t) - t \iff F(t+k) = F(t) + k$$

puis par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$F^n(t+k) = F^n(t) + k.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y < x+1$. On a alors $F(x) < F(y) < F(x+1) = F(x)+1$. Ceci prouve en toute généralité que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|x-y| < 1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| < 1$$

puis

$$|x-y| < 1 \Rightarrow |F^n(x) - F^n(y)| < 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence immédiate. S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(t)}{n}$ existe, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$, en posant $k = \lfloor u - t \rfloor$, on a $|u - t - k| < 1$ et donc

$$|F^n(u) - F^n(t)| = |F^n(u) - F^n(t+k) + k| \leqslant |F^n(u) - F^n(t+k)| + |k| < 1 + |k|$$

de sorte que

$$\left|\frac{F^n(u)}{n} - \frac{F^n(t)}{n}\right| < \frac{1+|k|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(u)}{n}$ existe et vaut ρ.

(b) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^m(x) = x + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a alors $F^{jm}(x) = x + jk$ d'où

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{F^{jm}(x)}{jm} = \frac{k}{m}.$$

Par division euclidienne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(j,r) \in \mathbb{N}\times[\![0, m-1]\!]$ tel que $n = jm + r$. Par continuité et périodicité, les applications $y -> |F^r(y) - y|$ admettent un majorant M commun indépendant de r, si bien que

$$\left|\frac{F^n(x) - F^{jm}(x)}{n}\right| = \left|\frac{F^r\left(F^{jm}(x)\right) - F^{jm}(x)}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{j\to+\infty} \frac{F^{jm}(x)}{jm} = \frac{k}{m}.$$

On conclut avec la question précédente que $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(t)}{n} = \frac{k}{m}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Il reste à étudier le cas où $F^n(x) - x$ n'est entier pour aucun $x \in \mathbb{R}$ et aucun entier n non nul. Par 1-périodicité, il existe $k(n) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(n) < F^n(x) - x < k(n)+1$, $k(n)$ étant indépendant de x. En écrivant cette inégalité pour les valeurs successives $x = 0$, $x = F^n(0)$, $x = F^{2n}(0), \dots$ et en sommant toutes les inégalités obtenues, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$mk(n) < F^{mn}(0) < m(k(n)+1) \iff \frac{k(n)}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{k(n)+1}{n}.$$

Ce résultat est vrai en particulier pour $m = 1$. En conséquence :

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

puis en échangeant les rôles joués par m et n et en ajoutant, il vient

$$\left| \frac{F^{m}(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, de sorte que pour $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$

$$\left| \frac{F^{m}(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \varepsilon.$$

$\left(\frac{F^n(0)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite de Cauchy de réels, donc convergente, ce qui conclut à l'existence de ρ.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**