# 10. Séries, familles sommables - Exercices

Du crabe gelé

Sauf mention contraire, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

**Séries à terme général de signe constant**

**E-10.1.** *(N')** Donner la nature des séries de terme général $u_n$ suivantes.

(a) $u_n = \dfrac{n^2}{n!+1}$. (b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$. (c) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$.

(d) $u_n = \left(\operatorname{cotan}\dfrac{1}{n^2} - n^2\cos\dfrac{1}{n^2}\right)$. (e) $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$. (f) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2^{(-1)^n n}}}$.

(g) $u_n = \dfrac{1}{16^n}\dbinom{4n}{2n}$. (h) $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$. (i) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. (j) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$.

*L'énoncé détaillé est identique.*

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.2.** *(5')** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs, telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pour $n \geqslant n_0$. Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge aussi.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.3.** *(5')*** Déterminer la nature de $\sum \sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.4.** *(30')*** Donner la nature des séries de terme général $u_n$ suivantes. On discutera selon la valeur des paramètres.

(a) $u_n = (n^a)^{n^b}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. (b) $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. (c) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(d) $u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. (e) $u_n = \dfrac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a>0$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.5.** *(10')*** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que $\sum b_n$ et $\sum \dfrac{a_n}{b_n}$ convergent toutes les deux.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.6.** *(10')*** Soit $u$ une suite réelle positive telle que $\sum u_n$ converge.

(a) A-t-on $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

(b) Montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ si l'on suppose de plus $u$ décroissante.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.7.** *(15')*** Soit $u\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Étudier la nature de $\sum u_n$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.8.** *(5')*** Soit $u$ une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et on suppose que $(S_n - nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.9.** *(20')*** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes strictement positifs et telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Étudier la convergence de $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$ pour $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.10.** *(20')**** *Série des inverses des nombres premiers.* Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $p_n$ le $n$-ième nombre premier.

(a) Montrer que $\sum \dfrac{1}{p_n}$ est de même nature que $\sum \ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)$.

(b) En faisant intervenir une série géométrique dans la seconde série ci-dessus, montrer que $\sum \dfrac{1}{p_n}$ est divergente.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.11.** *(15')**** Déterminer la nature de $\sum \dfrac{\ln|\sin n|}{n}$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.12.** (*20'*)*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui décroît vers 0 et telle que $\sum u_n$ converge, et $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.

(i) Pour tout $x \in [0, A]$, il existe $P \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\in P} u_n = x$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.13.** (*30'*)*** *Séries de Engel.* Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites croissantes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels vérifiant $q_0 \geqslant 2$.

(a) Montrer que pour tout $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$, $\sum \frac{1}{q_0 \dots q_n}$ est convergente. On note $\varphi(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_n}$.

(b) Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathscr{S}$ sur $]0, 1]$.

(c) Montrer que $x \in ]0, 1]$ est rationnel si et seulement si $q = \varphi^{-1}(x)$ est une suite stationnaire. Montrer que e est irrationnel.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**Études asymptotiques : séries télescopiques, comparaison avec des intégrales, sommations de relations de comparaison**

**E-10.14.** (*10'*)* Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante continue par morceaux. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n).$$

(a) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

(b) Montrer que si $f$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_0^N f(t)\mathrm{d}t.$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.15.** (*15'*)** Soit $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}\ln(n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $u$ est convergente.

(b) Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ à l'aide de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} - \ln N\right)$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.16.** (*10'*)** Soient $a \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $u$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $u$ converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.17.** (*15'*)** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $u_0$ pour que $u$ soit bornée.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.18.** (*10'*)** Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, donner un équivalent de $u_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$ puis déterminer la nature de $\sum u_n$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.19.** (*10'*)** *Règle forte de Raabe-Duhamel.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas et telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour $\alpha > 1$.

(a) On pose $w_n = n^\beta u_n$ pour $\beta \in ]1, \alpha[$. Montrer que $w_n$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

(b) Établir de même que $\sum u_n$ est divergente lorsque $\alpha < 1$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.20.** (*10'*)** Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$ quand $n$ tend vers l'infini.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.21.** (*15'*)** Déterminer un équivalent quand $x$ tend vers $1^-$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.22.** (*20'*)** On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
(a) Montrer que $u$ converge vers 0 par valeurs strictement positives.
(b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ existe dans $\mathbb{R}^*$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.
(c) Donner le terme suivant du développement asymptotique de $u_n$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.23.** (*15'*)** Soit $u$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n$ et donner sa limite.
(b) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
(c) Étudier $\sum u_n$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.24.** (*15'*)** Soit $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $f$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ une application continue décroissante. Établir les liens logiques entre les deux énoncés suivants (si une implication est fausse, donner un contre-exemple).
(i) $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
(ii) $\sum u_n f(S_n)$ converge.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.25.** (*20'*)** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (3k-1)^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.26.** (*25'*)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls, avec $u_0 > 0$. On suppose que $\sum u_n$ diverge et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
(a) Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.
(b) Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
(c) En supposant cette fois que $\sum u_n$ converge et en posant $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la nature de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
(d) *Difficile*. Toujours sous l'hypothèse où $\sum u_n$ converge, on pose $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{u_n}{T_n^\alpha}$ et $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ sont-elles de même nature ?

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.27.** (*25'*)*** Soit $a > 1$.
(a) Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

(b) Former une relation de récurrence entre $u_n$ et $u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Montrer que lorsque $n$ tend vers $+\infty$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.28.** (*30'*)*** Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $m_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose encore

$$t_n = \alpha u_n + (1-\alpha) m_n.$$

Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.29.** (*30'*)*** Soit $\alpha \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une plus petite constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} (1-a_k)^{\alpha} \leqslant C$$

et donner la valeur de $C$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**Séries numériques de terme général quelconque, séries alternées**

**E-10.30.** (*5'*)* Soient $u$, $v$, $w$ trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors $\sum v_n$ aussi.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.31.** (*10'*)* Soient $(u,v)$ deux suites réelles ne s'annulant pas et telles que $\sum \dfrac{u_n}{v_n}$ et $\sum \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2$ sont convergentes. Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{u_n+v_n}$ converge.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.32.** (*15'*)* *Règle de Cauchy* : soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(a) Montrer que $\sum u_n$ converge lorsque $\ell < 1$ et diverge lorsque $\ell > 1$. Que peut-on dire si $\ell = 1$ ?

(b) *Application* : étudier la nature des séries de terme général $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.33.** (*20'*)** Étudier la convergence des séries de terme général $u_n$ suivantes.

(a) $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$. (b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$. (c) $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^{\alpha} + (-1)^n}}$, selon $\alpha > 0$. (e) $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ si $n \equiv 0\ [3]$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sinon.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.34.** (*10'*)** (a) Peut-on trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ ne s'annulant pas et telle que $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2 a_n}$ soient toutes deux convergentes ?

(b) Peut-on choisir la suite $a$ strictement positive et maintenir un tel résultat ?

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.35.** (*15'*)** Soit $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum (-1)^n u_n$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.36.** (*15'*)** Soit $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $b_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.37.** (*5'*)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(u_n) \geqslant 0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la seconde converge absolument.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.38.** (*20'*)** Soit $u$ définie par $u_0 = 0$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^2}$.

(b) Quelle est la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$ ?

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.39.** (*15'*)** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = 2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.40.** (*20'*)** Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ et donner son signe pour $x \in \mathbb{R}$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.41.** (*25'*)*** *Théorème de Riemann.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le terme général d'une série semi-convergente.
(a) Montrer que $P = \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N}, u_n < 0\}$ sont deux ensembles infinis. On note $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux extractions telles que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ contiennent exactement tous les éléments de $P$ et de $N$ respectivement. Montrer que $\sum u_{\varphi(n)}$ et $\sum u_{\psi(n)}$ sont divergentes vers $+\infty$.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathscr{S}_{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente et de somme $x$.
(c) Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathscr{S}_{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente vers $+\infty$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, séries exponentielles**

**E-10.42.** (*10'*)* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de $A$ hors diagonale sont strictement positifs. Montrer que tous les coefficients de $e^A$ sont strictement positifs.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.43.** (*10'*)** Soient $\|.\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $\varphi$ un morphisme d'algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi$ est continue et donner une majoration explicite de $|||\varphi|||$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.44.** (*15'*)** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in E$, et on note $I = \mathrm{id}_E$.
(a) Montrer que $\mathrm{Im}(u - I) \oplus \mathrm{Ker}(u - I) = E$.
(b) On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = p(x)$$

où $p$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u - I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - I)$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.45.** (*10'*)** Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ soit convergente et de somme nulle. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.46.** (*15'*)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
(a) Donner la décomposition $D + N$ de $e^A$ en fonction de celle de $A$.
(b) Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $e^A$ l'est.
(c) Résoudre $e^A = I_n$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.47.** (*20'*)** *Cet exercice utilise les suites de Cauchy, voir le TD sur le chapitre « espaces vectoriels normés ».* Soit $E$ un espace vectoriel normé.
(a) Montrer que si $E$ est complet, alors toute série absolument convergente dans $E$ est convergente dans $E$.
Dans la suite, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E$.
(b) Montrer que si $u$ possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.
(c) Montrer qu'il existe une suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $u$ telle que $\|v_{n+1} - v_n\| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(d) Montrer la réciproque du point (a).

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**Ensembles dénombrables, cardinaux**

**E-10.48.** (*5'*)* Un nombre *décimal* est un réel dont le développement décimal propre se conclut par une suite infinie de zéros. Donner deux arguments prouvant que l'ensemble $D$ des nombres décimaux est dénombrable.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.49.** (*5'*)* Montrer que $\mathbb{Q}(X_1, \dots, X_p)$ (ensemble des fractions rationnelles à $p \geqslant 1$ indéterminées à coefficients dans $\mathbb{Q}$) est dénombrable.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.50.** (*5'*)* Soit $I$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Déterminer toutes les applications continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \subset \mathbb{Q}$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.51.** (*15'*)** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ soit un maximum local de $f$. Montrer que $f(A)$ est dénombrable.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.52.** (*10'*)** *Théorème de Cantor.* Soit $E$ un ensemble. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) > \mathrm{Card}(E)$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.53.** (*15'*)*** (a) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents. On pourra utiliser sans preuve le théorème de Cantor-Bernstein : si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de $A$ dans $B$ et une injection de $B$ dans $A$, alors il existe une bijection de $A$ dans $B$ (voir exercice de cette même feuille).

(b) L'ensemble $\mathscr{S}$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.54.** (*30'*)*** *Théorème de Cantor-Bernstein.* Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels qu'il existe $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications injectives. On note $h = g \circ f$, $R = E \setminus g(F)$ le complémentaire dans $E$ de l'image de $F$ par $g$, et

$$\mathscr{V} = \{M \in \mathscr{P}(E), R \cup h(M) \subset M\}.$$

On pose encore $V = \bigcap_{M \in \mathscr{V}} M$.

(a) Montrer que $E \in \mathscr{V}$ et $V \in \mathscr{V}$.

(b) Montrer que $R \cup h(M) \in \mathscr{V}$ pour tout $M \in \mathscr{V}$.

(c) Montrer que $R \cup h(V) = V$ et que

$$g^{-1}(E \setminus V) = F \setminus f(V).$$

(d) Montrer que $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} V & \to & f(V) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} g^{-1}(E\setminus V) & \to & E \setminus V \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ sont des bijections. En déduire qu'il existe une bijection de $E$ sur $F$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**Familles sommables, produits de Cauchy**

**E-10.55.** (*5'*)* Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. À l'aide d'un produit de Cauchy, déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$. Comment pourrait-on obtenir celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$ ?

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.56.** (*10'*)* Déterminer les réels $x$ pour lesquels la série $\sum x^{p_n}$ est convergente, $p_n$ désignant le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n \in \mathbb{N}$. Calculer sa somme dans ce cas.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.57.** (*10'*)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{1}{n}$ si l'écriture décimale de $n$ ne comporte pas le chiffre 9 et $u_n = 0$ sinon. Étudier la nature de $\sum u_n$.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.58.** (*10'*)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général de la série produit de $\sum u_n$ par elle-même. Montrer que $\sum w_n$ est divergente.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.59.** (*10'*)* Soient $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une famille sommable, et $\varphi$ et $\psi$ deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{\varphi(N)} \sum_{p=0}^{\psi(N)} u_{n,p}.$$

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.60.** (*10'*)* Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$ de représentation irréductible $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \wedge q = 1$, on pose $u_r = 2^{-pq}$. Montrer que la famille $(u_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ est sommable.

**Énoncé détaillé – Corrigé**

**E-10.61.** (*15'*)$^{**}$ Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.62.** (*15'*)$^{**}$ Pour tout $x\in]-1,1[$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x}{1-x}$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.63.** (*10'*)$^{**}$ Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $u_{p,q}=\dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}$. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.64.** (*20'*)$^{**}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $r_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

(a) Justifier la convergence de $\sum r_n$ et donner la valeur de sa somme.

(b) La famille $\big(u_{n,k}\big)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ définie par $u_{n,k}=\begin{cases}0 \text{ si } k<n\\ \dfrac{(-1)^k}{k^2} \text{ si } k\geqslant n\end{cases}$ est-elle sommable ?

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.65.** (*20'*)$^{**}$ *Un cas de non application du théorème de Fubini.* Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p}=\dfrac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ et $u_{n,p}=0$ sinon. Montrer que les deux sommes ci-dessous sont finies et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}\right)=-\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}\right)\neq 0.$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.66.** (*15'*)$^{**}$ *Théorème de Mertens.* Soit $(u,v)\in(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On suppose que $\sum u_n$ converge absolument et que $\sum v_n$ converge. On pose $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_{n-k}v_k$ le terme général du produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum v_n$. On pose aussi $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k$, $V=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$, et $W_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}w_k$.

En exprimant $W_n$ à l'aide des diverses quantités introduites ci-dessus, montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge vers le produit de leurs sommes.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.67.** (*15'*)$^{**}$ Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{z^{p+q}-1}$.

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.68.** (*20'*)$^{***}$ Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$, montrer la convergence des deux séries ci-dessous ainsi que l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(z+k)}=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.69.** (*20'*)$^{***}$ *Inégalité de Hilbert.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |a_n|^2$ converge.

(a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = -i\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

En déduire que

$$\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

(b) En déduire que la famille $\left(\dfrac{a_k a_\ell}{k+\ell+1}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et que

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{|a_k a_\ell|}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

**E-10.70.** (*30'*)$^{***}$ Soit $a$ une suite de réels positifs qui converge vers 0. Pour tout $x > 0$, on note $N(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant x\}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} N(x)\mathrm{d}x$ converge, et qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} N(x)\mathrm{d}x.$$

**Énoncé détaillé** – **Corrigé**

# 10. Séries, familles sommables - Exercices (énoncés détaillés)

Sauf mention contraire, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

**Séries à terme général de signe constant**

**E-10.1.** $(N')^*$ Donner la nature des séries de terme général $u_n$ suivantes.

(a) $u_n = \dfrac{n^2}{n!+1}$. (b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$. (c) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$.

(d) $u_n = \left(\operatorname{cotan}\dfrac{1}{n^2} - n^2\cos\dfrac{1}{n^2}\right)$. (e) $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$. (f) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n n}}$.

(g) $u_n = \dfrac{1}{16^n}\dbinom{4n}{2n}$. (h) $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$. (i) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. (j) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.2.** $(5')^*$ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs, telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pour $n \geqslant n_0$. Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge aussi. On pourra majorer $b_n$ à l'aide d'une récurrence.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.3.** $(5')^{**}$ (a) Déterminer la nature de $\sum \sin((2-\sqrt{3})^n\pi)$.

(b) Déterminer la nature de $\sum \sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.4.** $(30')^{**}$ Démontrer les résultats suivants.

(a) Pour $u_n = (n^a)^{n^b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $b=0$ et $a<-1$, ou $b>0$ et $a<0$.

(b) Pour $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

(c) Pour $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

(d) Pour $u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

(e) Pour $u_n = \dfrac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a>0$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a \geqslant 1$ ou $a<1$ et $\alpha < -1$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.5.** $(10')^{**}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que $\sum b_n$ et $\sum \dfrac{a_n}{b_n}$ convergent toutes les deux si et seulement si $\sum \sqrt{a_n}$ est convergente.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.6.** $(10')^{**}$ Soit $u$ une suite réelle positive telle que $\sum u_n$ converge.

(a) Construire un exemple ne vérifiant pas $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ si l'on suppose de plus $u$ décroissante. On pourra considérer les sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $S_{2p} - S_p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.7.** $(15')^{**}$ Soit $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant cette inégalité pour des entiers $n$ puissances de 2, montrer que $\sum u_n$ converge.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.8.** $(5')^{**}$ Soit $u$ une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $(S_n - nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée. Montrer que $\sum u_n$ est convergente. On pourra minorer $S_p - S_q$ pour $p \geqslant q$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.9.** $(20')^{**}$ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes strictement positifs et telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

(a) Montrer que $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$ pour $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ converge lorsque $\alpha+\beta \geqslant 1$. On pourra majorer $u_n^\alpha v_n^\beta$ par concavité.

(b) Montrer par des contre-exemples qu'on ne peut pas conclure à la nature de cette série dans les autres cas.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.10.** (*20'*)*** *Série des inverses des nombres premiers.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n$ le $n$-ième nombre premier.

(a) Montrer à l'aide d'un équivalent que $\sum \frac{1}{p_n}$ est de même nature que $\sum \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)$.

(b) En faisant intervenir une série géométrique dans la seconde série ci-dessus, et en exploitant la décomposition des entiers naturels en produit de facteurs premiers, montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}\right)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\sum \frac{1}{p_n}$ est divergente.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.11.** (*15'*)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} |\sin(k)|^{\frac{1}{k}}$.

(a) Montrer que $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) Déterminer la nature de $\sum \frac{\ln|\sin n|}{n}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.12.** (*20'*)*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui décroît vers 0 et telle que $\sum u_n$ converge, et $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On veut montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.

(i) Pour tout $x \in [0, A]$, il existe $P \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\in P} u_n = x$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

(a) Si (ii) n'est pas vérifié, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k$. Déterminer à l'aide de $n_0$ deux réels $(\alpha, \beta) \in ]0, A[^2$ vérifiant $\alpha < \beta$ et tel que pour tout $P \subset \mathbb{N}$, $\sum_{n\in P} u_n \notin ]\alpha, \beta[$.

(b) Si (ii) est vérifié, considérer $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant x\}$, puis construire par récurrence une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_k}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.13.** (*30'*)*** *Séries de Engel.* Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites croissantes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels vérifiant $q_0 \geqslant 2$.

(a) Montrer par une majoration directe que pour tout $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$, $\sum \frac{1}{q_0 \dots q_n}$ est convergente. On note $\varphi(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_n}$.

(b) (i) Montrer que pour tout $(q, r) \in S^2$, $\frac{1}{q_0} < \varphi(q) \leqslant \frac{1}{q_0 - 1}$, et en déduire que $\varphi(q) = \varphi(r) \Rightarrow q_0 = r_0$. Montrer que $\varphi$ est injective.

(ii) Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathscr{S}$ sur $]0, 1]$ en construisant algorithmiquement un antécédant de $x \in ]0, 1]$ par $\varphi$. On s'inspirera de la preuve de l'injectivité.

(c) Montrer que $x \in ]0, 1]$ est rationnel si et seulement si $q = \varphi^{-1}(x)$ est une suite stationnaire. Pour le sens direct, on pourra raisonner par contraposée et construire un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. Montrer que e est irrationnel.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**Études asymptotiques : séries télescopiques, comparaison avec des intégrales, sommations de relations de comparaison**

**E-10.14.** *(10')** Soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante continue par morceaux. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n).$$

(a) Montrer par un encadrement que la série $\sum w_n$ est convergente.
(b) Montrer par un nouvel encadrement que si $f$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_0^N f(t)\mathrm{d}t.$$

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.15.** *(15')*** Soit $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}\ln(n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) En étudiant la série $\sum(u_n - u_{n-1})$, montrer que $u$ est convergente.
(b) Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ à l'aide de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p} - \ln N\right)$. On pourra soustraire et ajouter deux fois les termes pairs.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.16.** *(10')*** Soient $a \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $u$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(a) Étudier la monotonie de $u$.
(b) En explicitant $a_n$ en fonction de $u_n$, montrer que si la suite $u$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge.
(c) Démontrer la réciproque par contraposée.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.17.** *(15')*** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2).$$

Montrer que $u$ est bornée si et seulement si $u_0 = 2\mathrm{e} - 1$. On pourra poser $v_n = \frac{u_n}{n!}$ et étudier $v_{n+1} - v_n$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.18.** *(10')*** Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, donner un équivalent de $u_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$ puis déterminer la nature de $\sum u_n$. On pourra appliquer la règle de Raabe-Duhamel vue en TD.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.19.** *(10')*** *Règle forte de Raabe-Duhamel.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas et telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour $\alpha > 1$.
(a) On pose $w_n = n^\beta u_n$ pour $\beta \in ]1,\alpha[$. En considérant la série $\sum \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$, montrer que $w_n$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.
(b) Établir de même que $\sum u_n$ est divergente lorsque $\alpha < 1$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.20.** *(10')*** À l'aide d'un encadrement par des intégrales, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$ quand $n$ tend vers l'infini.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.21.** *(15')*** À l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent quand $x$ tend vers $1^-$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.22.** (*20'*)$^{**}$ On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Montrer que $u$ est positive, décroissante, puis qu'elle converge vers 0.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ à l'aide d'une sommation d'équivalents.

(c) À l'aide d'un developpement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{t^2}$ en $t = 0$, donner le terme suivant du développement asymptotique de $u_n$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.23.** (*15'*)$^{**}$ Soit $u$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer $u$ est positive, décroissante, puis donner sa limite.

(b) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

(c) En étudiant $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, donner la nature de $\sum u_n$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.24.** (*15'*)$^{**}$ Soit $u \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $f$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ une application continue décroissante.

(a) Montrer que si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\sum u_n f(S_n)$ converge.

(b) Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.25.** (*20'*)$^{**}$ On pose $u_n = \dfrac{1}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (3k-1)^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Écrire un encadrement de $\ln(nu_n)$ à l'aide d'intégrales.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.26.** (*25'*)$^{**}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls, avec $u_0 > 0$. On suppose que $\sum u_n$ diverge et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

(a) En considérant la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.

(b) À l'aide d'un encadrement par des intégrales, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) En supposant cette fois que $\sum u_n$ converge et en posant $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer de même que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

(d) *Difficile.* Toujours sous l'hypothèse où $\sum u_n$ converge, on pose $T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer par un exemple que $\sum \dfrac{u_n}{T_n^\alpha}$ et $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ ne sont pas nécessairement de même nature.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.27.** (*25'*)$^{***}$ Soit $a > 1$.

(a) Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

(b) Justifier que la suite $u$ est entièrement définie par $u_0 = a$, $u_1 = \dfrac{a}{a-1}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que lorsque $n$ tend vers $+\infty$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

On pourra introduire la suite $v$ définie par $v_n = u_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, et étudier $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.28.** (*30'*)$^{***}$ Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $m_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose encore

$$t_n = \alpha u_n + (1-\alpha) m_n.$$

(a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(b) Montrer la réciproque en explicitant une relation de récurrence vérifiée par $m_n$, que l'on résoudra par la méthode usuelle de résolution des équations linéaires pour obtenir $m_n$ à l'aide des $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilisera ensuite la règle de Raabe-Duhamel (voir TD).

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.29.** (*30'*)$^{***}$ Soient $\alpha \geqslant 1$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$.
(a) Montrer que $(1-x)^\alpha \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n \prod_{k=1}^{n} (1-a_k)^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha a_n}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}.$$

puis déterminer une constante $C \in \mathbb{R}_+$, indépendante de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} (1-a_k)^\alpha \leqslant C.$$

(b) Déterminer la plus petite constante $C > 0$ telle que l'inégalité ci-dessus soit valide pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

### Séries numériques de terme général quelconque, séries alternées

**E-10.30.** (*5'*)$^{*}$ Soient $u$, $v$, $w$ trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors $\sum v_n$ aussi. On pourra considérer $v_n - u_n$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.31.** (*10'*)$^{*}$ Soient $(u, v)$ deux suites réelles ne s'annulant pas et telles que $\sum \dfrac{u_n}{v_n}$ et $\sum \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2$ sont convergentes. Montrer à l'aide d'un développement limité que $\sum \dfrac{u_n}{u_n+v_n}$ converge.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.32.** (*15'*)$^{*}$ *Règle de Cauchy* : soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
(a) En majorant $u_n$ par le terme général d'une série géométrique, montrer que $\sum u_n$ converge lorsque $\ell < 1$. Justifier de même qu'elle diverge lorsque $\ell > 1$, et qu'on ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$.
(b) *Application* : étudier la nature des séries de terme général $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.33.** (*20'*)$^{**}$ Faire les études suivantes.
(a) Pour $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$, montrer que $\sum u_n$ est convergente.
(b) Pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$, mntrer que $\sum u_n$ est convergente, en la copuant en trois.
(c) Pour $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, montrer par un développement limité que $\sum u_n$ est divergente.
(d) Pour $\alpha > 0$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$, montrer par un développement limité que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.
(e) Pour $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ si $n \equiv 0$ [3], $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sinon, montrer que $\sum u_n$ diverge en regroupant judicieusement les termes.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.34.** (*10'*)$^{**}$ (a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ ne s'annulant pas et telle que $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2 a_n}$ soient toutes deux convergentes.
(b) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, alors $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2 a_n}$ ne peuvent être simultanément convergentes.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.35.** *(15')*** Soit $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer la convergence de $\sum (-1)^n u_n$.

(b) En regroupant deux à deux les termes consécutifs des sommes partielles et en écrivant le résultat sous forme de produit, calculer la somme de cette série.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.36.** *(15')*** Soit $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $b_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. On pourra regrouper deux à deux les termes consécutifs dans $b_{2p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.37.** *(5')*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(u_n) \geqslant 0$. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. En explicitant $|u_n|^2$ à l'aide de $u_n$ et $\mathrm{Re}(u_n)$, montrer que $\sum u_n^2$ converge absolument.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.38.** *(20')*** Soit $u$ définie par $u_0 = 0$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Donner un équivalent de $u_n$ et en déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^2}$.

(c) Quelle est la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$ ?

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.39.** *(15')*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

(b) Montrer que $\sum u_n$ vérifie directement le critère des séries alternées.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.40.** *(20')*** Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer la convergence de $I$.

(b) En découpant $I$ avec la relation de Chasles selon des segments bien choisis, donner le signe de $I$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.41.** *(25')**** *Théorème de Riemann.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le terme général d'une série semi-convergente.

(a) Montrer par l'absurde que $P = \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N}, u_n < 0\}$ sont deux ensembles infinis. On note $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux extractions telles que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ contiennent exactement tous les éléments de $P$ et de $N$ respectivement. Montrer, de nouveau par l'absurde, que $\sum u_{\varphi(n)}$ et $\sum u_{\psi(n)}$ sont divergentes vers $+\infty$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathscr{S}_{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente et de somme $x$. On pourra construire $\sigma$ par récurrence en ajoutant successivement des termes de $P$ et de $N$ de façon à ce que les sommes partielles ainsi obtenues encadrent $x$.

(c) Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathscr{S}_{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente vers $+\infty$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

### Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, séries exponentielles

**E-10.42.** *(10')** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que tous les coefficients de $A$ sont strictement positifs. Montrer que tous les coefficients de $\mathrm{e}^A$ sont strictement positifs.

(b) On suppose seulement que tous les coefficients de $A$ hors diagonale sont strictement positifs. Montrer que tous les coefficients de $\mathrm{e}^A$ sont strictement positifs.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.43.** *(10')*** Soient $\|.\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $\varphi$ un morphisme d'algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi$ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 1$. On pourra redémontrer et utiliser le fait que $\|M\| < 1 \Rightarrow I_n - M$ inversible.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.44.** *(15')*** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in E$, et on note $I = \mathrm{id}_E$.

(a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathrm{Im}(u-I) \cap \mathrm{Ker}(u-I)$, et en déduire que $\mathrm{Im}(u-I) \oplus \mathrm{Ker}(u-I) = E$.

(b) On pose $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = p(x)$$

où $p$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u-I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u-I)$. On réexploitera les calculs de la question précédente.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.45.** *(10')*** Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ soit convergente et de somme nulle. À l'aide d'une transformation d'Abel voir TD), montrer que $\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.46.** *(15')*** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que si $A = D + N$ est la « décomposition $D + N$ » de $A$, alors celle de $\mathrm{e}^A$ est $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^D + \mathrm{e}^D \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{N^k}{k!}$.

(b) Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{e}^A$ l'est. On pourra montrer que si $p$ est l'indice de nilpotence de $N$, alors $(N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre.

(c) Résoudre $\mathrm{e}^A = I_n$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.47.** *(20')*** *Cet exercice utilise les suites de Cauchy, voir le TD sur le chapitre « espaces vectoriels normés »*. Soit $E$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que si $E$ est complet, alors toute série absolument convergente dans $E$ est convergente dans $E$. On majorera simplement $\left\| \sum_{n=p}^{q} u_n \right\|$ pour $p < q$ assez grands.

Dans la suite, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E$.

(b) Montrer que si $u$ possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

(c) Construire par récurrence une extractrice $\varphi$ telle que $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer la réciproque du point (a).

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

### Ensembles dénombrables, cardinaux

**E-10.48.** *(5')** Un nombre *décimal* est un réel dont le développement décimal propre se conclut par une suite infinie de zéros. Donner deux arguments prouvant que l'ensemble $D$ des nombres décimaux est dénombrable, l'un explicitant une surjection d'un ensemble dénombrable sur $D$, l'autre une injection de $D$ dans un ensemble dénombrable.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.49.** *(5')** Montrer que $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$ (ensemble des polynôme à $p \geqslant 1$ indéterminées à coefficients dans $\mathbb{Q}$) est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_p)$ (ensemble des fractions rationnelles de même) est dénombrable.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.50.** *(5')** Soit $I$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Montrer que les seules applications continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \subset \mathbb{Q}$ sont les applications constantes de valeur rationnelle.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.51.** *(15')*** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ soit un maximum local de $f$. Montrer que $f(A)$ est dénombrable. On pourra associer un intervalle ouvert à chaque élément de $f(A)$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.52.** *(10')*** *Théorème de Cantor*. Soit $E$ un ensemble. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) > \mathrm{Card}(E)$. On pourra supposer l'existence d'une bijection entre $E$ et $\mathscr{P}(E)$ et construire explicitement un ensemble qui ne peut pas avoir d'antécédent.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.53.** *(15')**** (a) En utilisant des développements binaires, montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents. On pourra utiliser sans preuve le théorème de Cantor-Bernstein : si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de $A$ dans $B$ et une injection de $B$ dans $A$, alors il existe une bijection de $A$ dans $B$ (voir exercice de cette même feuille).

(b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. On pourra considérer, pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, une bijection fixant exactement $A$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.54.** (*30'*)*** *Théorème de Cantor-Bernstein.* Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels qu'il existe $f: E \to F$ et $g: F \to E$ deux applications injectives. On note $h = g \circ f$, $R = E \setminus g(F)$ le complémentaire dans $E$ de l'image de $F$ par $g$, et

$$\mathscr{V} = \{M \in \mathscr{P}(E), R \cup h(M) \subset M\}.$$

On pose encore $V = \bigcap\limits_{M \in \mathscr{V}} M$.

(a) Montrer que $E \in \mathscr{V}$ et $V \in \mathscr{V}$. On se rappellera que l'intersection des images contient l'image de l'intersection.
(b) Montrer que $M \in \mathscr{V} \Rightarrow R \cup h(R \cup h(M)) \subset R \cup h(M)$, puis que $R \cup h(M) \in \mathscr{V}$ pour tout $M \in \mathscr{V}$.
(c) Montrer par l'absurde que $R \cup h(V) = V$ et que

$$g^{-1}(E \setminus V) = F \setminus f(V).$$

(d) Montrer que $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} V & \to & f(V) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} g^{-1}(E \setminus V) & \to & E \setminus V \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ sont des bijections. Montrer que $\varphi : x \mapsto \tilde{f}(x)$ si $x \in V$ et $\varphi(x) = \tilde{g}^{-1}(x)$ si $x \in E \setminus V$ définit une bijection de $E$ sur $F$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**Familles sommables, produits de Cauchy**

**E-10.55.** (*5'*)* Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Écrire le terme général de la série produit de $\sum a^n$ par elle-même et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a^n$. Comment pourrait-on obtenir celle de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$ ?

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.56.** (*10'*)* À l'aide d'un regroupement par paquets, montrer que la série $\sum x^{p_n}$ est convergente si et seulement si le réel $x$ vérifie $|x| < \dfrac{1}{10}$, où $p_n$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n \in \mathbb{N}$. Calculer sa somme dans ce cas.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.57.** (*10'*)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{1}{n}$ si l'écriture décimale de $n$ ne comporte pas le chiffre 9 et $u_n = 0$ sinon. À l'aide d'un découpage en paquets, montrer que $\sum u_n$ converge.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.58.** (*10'*)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et on note $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le terme général de la série produit de $\sum u_n$ par elle-même.

(a) Montrer que $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(b) En déduire que $\sum w_n$ est divergente.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.59.** (*10'*)* Soient $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ une famille sommable, et $\varphi$ et $\psi$ deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. À l'aide d'une sommation par paquets (qu'n pourra éventuellement visualiser sur un dessin), montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{\varphi(N)} \sum_{p=0}^{\psi(N)} u_{n,p}.$$

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.60.** (*10'*)* Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$ de représentation irréductible $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \wedge q = 1$, on pose $u_r = 2^{-pq}$. Montrer que la famille $(u_r)_{r \in \mathbb{Q}_+^*}$ est sommable. On pourra la considérer comme une sous-famille d'une famille sommable.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.61.** (*15'*)** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que la famille $\left( \dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Justifier que $\sum\limits_q \left( \sum\limits_{p=1}^{q} \dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)$ est convergente, puis que $\alpha > 1$.
(b) Montrer la réciproque.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.62.** (*15'*)** Pour tout $x \in ]-1,1[$, montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \dfrac{x}{1-x}$. On pourra faire apparaître une série géométrique, et exploiter la décomposition des entiers en produit de facteurs premiers.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.63.** (*10'*)$^{**}$ Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}$. En remarquant que $\dfrac{q!}{(p+q+1)!} - \dfrac{(q+1)!}{(p+q+2)!}$, montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.64.** (*20'*)$^{**}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

(a) Montrer que $r_n$ est correctement défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ et que $r_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Justifier la convergence de $\sum r_n$ et donner la valeur de sa somme.

(b) Montrer que la famille $\left(u_{n,k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ définie par $u_{n,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } k<n \\ \dfrac{(-1)^k}{k^2} \text{ si } k \geqslant n \end{cases}$ n'est pas sommable.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.65.** (*20'*)$^{**}$ *Un cas de non application du théorème de Fubini.* Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $u_{n,p} = 0$ sinon. Montrer que les deux sommes ci-dessous sont finies et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = -\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) \neq 0.$$

On pourra effectuer une décomposition en éléments simples.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.66.** (*15'*)$^{**}$ *Théorème de Mertens.* Soit $(u,v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$. On suppose que $\sum u_n$ converge absolument et que $\sum v_n$ converge. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$ le terme général du produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum v_n$. On pose aussi $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, $V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$, et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

(a) Montrer que $W_n = U_n V - \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}R_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge vers le produit de leurs sommes.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.67.** (*15'*)$^{**}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{z^{p+q}-1}$ en effectuant un développement en série géométrique.

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.68.** (*20'*)$^{***}$ Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$.

(a) Décomposer $\dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(X+k)}$ en éléments simples.

(b) Montrer la convergence des deux séries ci-dessous ainsi que l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

**Énoncé non détaillé – Corrigé**

**E-10.69.** $(20')^{***}$ *Inégalité de Hilbert.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |a_n|^2$ converge.

(a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = -i\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

On pourra commencer par le cas $P = X^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

(b) En déduire que la famille $\left(\dfrac{a_k a_\ell}{k+\ell+1}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et que

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{|a_k a_\ell|}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

On pourra appliquer le résultat précédent à $P = \sum_{k=0}^{n} |a_k| X^k$ et écrire $P(t)^2$ et $|P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2$ comme des doubles sommes.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

**E-10.70.** $(30')^{***}$ Soit $a$ une suite de réels positifs qui converge vers 0. Pour tout $x > 0$, on note $N(x) = \mathrm{Card}\, I(x)$ où $I(x) = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant x\}$.

(a) Justifier que $N$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et nulle en dehors d'un intervalle borné.

(b) Construire une suite $(A_n)_{n\in}$ strictement décroissante et prenant exactement le même ensemble de valeurs que $A$.

(c) Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} N(x)\mathrm{d}x$ converge, et qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} N(x)\mathrm{d}x.$$

On pourra considérer $J_k = I(A_k) \setminus I(A_{k-1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**Énoncé non détaillé** – **Corrigé**

# 10. Séries, familles sommables - Exercices (corrigés)

**Séries à terme général de signe constant**

**E-10.1.** (a) $0 \leqslant u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $n^2 \frac{n^2}{n!+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, d'où $\sum u_n$ converge.

(b) $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln(n+1)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées, d'où $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(c) $\sum u_n$ est télescopique et $\sqrt{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.

(d) $u_n = \left(\operatorname{cotan}\frac{1}{n^2} - n^2\cos\frac{1}{n^2}\right) = \cos\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}} - n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^{-1} - n^2\right) = n^2\left(\left(1 + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^{-1} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge absolument.

(e) $\sin u_n = \sin\left(\operatorname{Arccos}\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(n^3+2)^2 - (n^3+1)^2}{(n^3+2)^2}} = \sqrt{\frac{2n^3+3}{(n^3+2)^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ d'où, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}} > 0$$

et $\sum u_n$ converge.

(f) $u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n} + 2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + 2^{-(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ d'où $\sum u_n$ est la somme de $\sum u_{2n}$ qui converge et de $\sum u_{2n+1}$ qui diverge, et $\sum u_n$ diverge.

(g) $u_n = \frac{1}{16^n}\frac{(4n)!}{(2n)!^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16^n}\frac{(4n)^{4n}\mathrm{e}^{4n}\sqrt{8\pi n}}{\mathrm{e}^{4n}(2n)^{4n}4\pi n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > 0$ avec la formule de Stirling, d'où $\sum u_n$ diverge.

(h) $0 \leqslant u_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}\left(1 - \mathrm{e}^{\ln n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ d'où $\sum u_n$ converge.

(i) $n^2 u_n = \mathrm{e}^{2\ln n + (\ln n)^2 - n\ln(\ln n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées car $2\ln n + (\ln n)^2 - n\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\ln(\ln n)$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge absolument.

(j) $u_n = \mathrm{e}^{-\ln n - \sqrt{\ln n}}$. $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\ln t - \sqrt{\ln t}}$ est décroissante positive sur $[2, +\infty[$ de sorte que $\sum u_n$ converge si et seulement si $f$ est intégrable sur $[2, +\infty[$. Avec le changement de variable $u = \sqrt{\ln t} \iff t = \mathrm{e}^{u^2}$, il vient

$$\int_2^x \mathrm{e}^{-\ln t - \sqrt{\ln t}}\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln x}} \mathrm{e}^{-u^2 - u} 2u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln x}} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

possède une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ puisque $u\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, si bien que $u \mapsto 2u\mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. $f$ est donc intégrable sur $[2, +\infty[$ par le théorème de changement de variable, d'où enfin $\sum u_n$ converge. *Remarque : on peut achever le calcul et constater que $x \mapsto -(2\sqrt{\ln x} + 1)\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}$ est une primitive de $f$ sur $]1, +\infty[$.*

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.2.** Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ par une récurrence triviale.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.3.** (a) On a $\sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2-\sqrt{3})^n\pi$ et $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ donc $\sum u_n$ est convergente.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme de Newton

$$A_n = (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k(1-(-1)^k).$$

Les termes de cette somme correspondant à des indices impairs sont nuls, les autres sont des entiers pairs puisque $1-(-1)^k = 2$ et $\sqrt{3}^k \in \mathbb{N}$ lorsque $k$ est pair, si bien que $A_n \in 2\mathbb{N}$, donc $A_n\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et

$$\sin((2+\sqrt{3})^n\pi) = \sin((2-\sqrt{3})^n\pi).$$

$\sum \sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$ est donc convergente puisque c'est la même série que la précédente.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.4.** (a) $*$ Si $b = 0$, $u_n = \frac{1}{n^{-a}}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < -1$.

$*$ Si $b > 0$ et $a \geqslant 0$, $u_n = n^{an^b}$ ne tend pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement. Si $b > 0$ et $a < 0$, $n^2 u_n = n^{2+an^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge.

$*$ Si $b<0$, $an^b \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) $u_n = \exp\left(n^\alpha \ln\left(1-\dfrac{1}{2n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^{\alpha-2}}{2}+O(n^{\alpha-4})\right)$. Si $\alpha>2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\dfrac{n^{\alpha-2}}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge. Sinon, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(c) $*$ Si $\alpha\leqslant -1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^\alpha x\mathrm{d}x$ est divergente car $\sin^\alpha x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$. $u$ n'est donc pas définie.

$*$ Supposons $\alpha>-1$. On sait que $\dfrac{2}{\pi}x\leqslant \sin x\leqslant x$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (voir chapitre de convexité) de sorte que pour tout $n\geqslant 2$, $0\leqslant \dfrac{\pi}{n}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$u_n \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{2^\alpha \pi}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}$$

et $u_n\leqslant \dfrac{\pi^{\alpha+1}}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}$ de même. On en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>0$.

(d) $(\operatorname{ch} n)^\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{2^\alpha}(1+\mathrm{e}^{-2n})^\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{2^\alpha}(1+\alpha\mathrm{e}^{-2n}+O(\mathrm{e}^{-4n}))$, $(\operatorname{sh} n)^\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{2^\alpha}(1-\alpha\mathrm{e}^{-2n}+O(\mathrm{e}^{-4n}))$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-2)n}}{2^\alpha}$ et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha<2$.

(e) $*$ Si $a=1$, $u_n = n^\alpha 2^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge.

$*$ Si $a>1$, $0\leqslant u_n\leqslant n^\alpha a^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge.

$*$ Si $a<1$ et $\alpha<-1$, $0\leqslant u_n\leqslant n^\alpha$ et $\sum u_n$ converge.

$*$ Si $a<1$ et $\alpha\geqslant -1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+a^{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La règle de Raabe-Duhamel (voir TD) donne que $\sum u_n$ diverge.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.5.** Montrons que l'existence d'une telle suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la convergence de $\sum\sqrt{a_n}$.

Supposons que $\sum\sqrt{a_n}$ converge : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convient. Réciproquement, supposons l'existence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum b_n$ et $\sum\dfrac{a_n}{b_n}$ convergent. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{a_k} = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\sqrt{b_k} \leqslant \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La série $\sum\sqrt{a_k}$ étant à termes positifs et à sommes partielles majorées est donc convergente.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.6.** (a) Non : pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=0$ si $n$ n'est pas un carré et $u_n=\dfrac{1}{n}$ sinon, $\sum u_n$ converge (ses sommes partielles se ramènent à celles de $\sum\dfrac{1}{n^2}$ mais $nu_n$ ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers l'infini (elle prend une infinité de fois la valeur 1).

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$S_{2p}-S_p = \sum_{k=p+1}^{2p} u_k \geqslant pu_{2p}$$

d'où

$$0\leqslant 2pu_{2p}\leqslant 2(S_{2p}-S_p)$$

si bien que $\lim\limits_{p\to+\infty} 2pu_{2p}=0$. De même

$$S_{2p+1}-S_{p+1}\leqslant pu_{2p+1}$$

et

$$0\leqslant 2pu_{2p+1}\leqslant 2(S_{2p+1}-S_{p+1})$$

d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} 2pu_{2p+1}=0$ et comme $2p \underset{p\to+\infty}{\sim} 2p+1$, on a encore $\lim\limits_{p\to+\infty}(2p+1)u_{2p+1}=0$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0.$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.7.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, de sorte que la propriété donnée s'écrit

$$S_{2n} - S_n \leqslant \frac{1}{n} S_n \iff S_{2n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il vient en prenant $n = 2^{k-1}$

$$S_{2^k} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) S_{2^{k-1}}$$

puis itérativement, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2^N} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^{N-1}}\right) S_{2^{N-1}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^{N-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{N-2}}\right) S_{2^{N-2}} \leqslant \ldots \leqslant S_1 \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Or

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

et

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{k-1}}$$

de sorte que $\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ est convergente par le théorème d'équivalence (son terme général est positif) et donc

$$\lim_{N \to +\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)$$

existe, puis par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

existe également. En particulier, cette suite de produits est majorée par un certain réel $M$ et on a donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2^N} \leqslant M S_1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en choisissant $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant 2^N$, on a par positivité de $u$

$$S_n \leqslant S_{2^N} \leqslant M S_1.$$

La série $\sum u_n$ est donc à terme général positif et à sommes partielles majorées, si bien qu'elle est convergente.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.8.** On note $M = \sup_{p \in \mathbb{N}} |S_p - p u_p|$. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \leqslant p$, on a par décroissance de $u$

$$S_p - S_q = \sum_{k=q+1}^{p} u_k \geqslant \sum_{k=q+1}^{p} u_p = (p - q) u_p$$

donc

$$S_q \leqslant S_p - p u_p + q u_p \leqslant M + q u_p$$

On fait alors tendre $p$ vers l'infini, ce qui donne $S_q \leqslant M$. D'après le théorème fondamental sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge car elle est de terme général positif et à sommes partielles majorées.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.9.** Par concavité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $(x, y, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \ln x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \ln y \leqslant \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y\right)$$

d'où par croissance de l'exponentielle

$$x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y$$

puis celle de $t \mapsto t^{\alpha+\beta}$

$$x^\alpha y^\beta \leqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y\right)^{\alpha+\beta}.$$

Supposons $\alpha+\beta \geqslant 1$. Comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $u$ et $v$ convergent vers 0 : il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 1$ et $v_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$. En appliquant l'inégalité de convexité précédente à $x = u_n$ et $y = v_n$ pour un tel $n$, on a $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}u_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v_n \leqslant 1$ et il vient

$$u_n^\alpha v_n^\beta \leqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}u_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v_n\right)^{\alpha+\beta} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta}u_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v_n.$$

La convergence de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}u_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v_n\right)$ donc celle de $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$ par positivité.

Si $\alpha+\beta < 1$, on ne peut conclure en général : on a par exemple convergence de $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$ si $u_n = v_n = \frac{1}{2^n}$, et divergence si $u_n = v_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.10.** (a) $p_n \to +\infty$ donc

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) \sim -\frac{1}{p_n}$$

et ces deux quantités étant négatives, les deux séries sont de même nature.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

Pour tout $N \geqslant 2$, les nombres premiers $(p_1, \dots, p_N)$ suffisent nécessairement pour décomposer en produit de facteurs premiers tous les entiers entre 2 et $N$. On note également $\alpha$ le plus grand des exposants présents dans toutes ces décompositions. On a alors

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_n^k}\right)\right) \geqslant \ln\left(\prod_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{1}{p_n^k}\right)\right).$$

Or, le développement de $\prod_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{1}{p_n^k}\right)$ fait intervenir tous les termes de la forme $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\dots p_N^{\alpha_N}}$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in [\![0, \alpha]\!]^N$, et donc

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\right)$$

quantité qui diverge vers $+\infty$ quand $N$ tend vers $+\infty$, ce qui montre la divergence de $\sum \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)$ et donc de $\sum \frac{1}{p_n}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.11.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} |\sin(k)|^{\frac{1}{k}}$. $p$ est décroissante et positive donc convergente, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{2n} = \prod_{k=1}^{n} |\sin(2k-1)^{\frac{1}{2k-1}}\sin(2k)^{\frac{1}{2k}}| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |\sin(2k-1)\sin(2k)|^{\frac{1}{2k}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} M^{\frac{1}{2k}} = M^{\frac{H_n}{2}}$$

avec $M = \max_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x-1)\sin(x)| < 1$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} p_{2n} = 0$, puis $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ par décroissance, et $\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln|\sin k|}{k} = \ln(p_n)$ diverge vers $-\infty$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.12.** Supposons que (ii) n'est pas vérifié : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k$. On pose alors $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}} u_n$ et $\beta = \sum_{n=0}^{n_0} u_n$. Par hypothèse sur $n_0$, on a donc $\alpha < \beta$. Soit $x \in ]\alpha, \beta[$ : supposons qu'il existe $P \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\in P} u_n = x$. Comme $x > \alpha$, on a nécessairement $n_0 \in P$. Comme $x < \beta$, il existe $k_0 \in [\![0, n_0-1]\!]$ tel que $k_0 \notin P$. Mais comme $u$ est décroissante, on a $u_{k_0} \geqslant u_{n_0}$, donc

$$\sum_{n\in P} u_n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{k_0\}} u_n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}} u_n = \alpha$$

ce qui est exclu. les éléments de $]\alpha, \beta[$ ne sont donc pas atteints par les sommes extraites de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, ce qui prouve que (i) n'est pas vérifié, et on a donc (i)$\Rightarrow$(ii) par contraposée.

Supposons (ii). Il est clair que $0 = \sum_{n\in\varnothing} u_n$ et $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Soit $x \in ]0, A[$ : comme $u$ décroit vers 0, $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant x\}$ est bien défini. Si $n_0 = 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = A > x$, et si $n_0 > 0$, alors comme $u_{n_0-1} > x$ par construction, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \geqslant u_{n_0-1} > x$ par (ii). On a donc en outre $x \leqslant u_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n$ dans tous les cas. Si $u_{n_0} = x$, alors $\sum_{n\in\{n_0\}} u_n = x$, sinon $n_1 = \min\{n \geqslant n_0+1, u_{n_0} + u_n \leqslant x\}$ est bien défini, puisque $u$ décroît vers 0 et que $x - u_{n_0} > 0$, si bien que $\{n \geqslant n_0+1, u_n \leqslant x - u_{n_0}\} \neq \emptyset$. On a aussi $x \leqslant u_{n_0} + u_{n_1} + \sum_{n=n_1+1}^{+\infty} u_n$ par un argument similaire à celui ci-dessus, en distinguant le cas éventuel où $n_1 = n_0+1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, supposons construits $n_0 < \ldots < n_k$ tels que $\sum_{i=0}^{k} u_{n_i} \leqslant x \leqslant \sum_{i=0}^{k} u_{n_i} + \sum_{i=n_k+1}^{+\infty} u_n$. Si $x = \sum_{i=0}^{k} u_{n_i}$, alors on pose $P = \{n_0, \ldots, n_k\}$ qui est tel que $x = \sum_{n\in P} u_n$, sinon, $n_{k+1} = \min\left\{n \geqslant n_k+1, \sum_{i=0}^{k+1} u_{n_i} \leqslant x\right\}$ est bien défini, et tel que $x \leqslant \sum_{i=0}^{k+1} u_{n_i} + \sum_{i=n_k+1}^{+\infty} u_n$, toujours par le même argument.

Si le processus s'arrête en un nombre fini d'étapes, $P$ est déjà construit, sinon, on pose $P = \{n_k, k \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leqslant x - \sum_{i=0}^{k} u_{n_i} \leqslant \sum_{i=n_k+1}^{+\infty} u_n.$$

Comme la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a $\sum_{i=n_k+1}^{+\infty} u_i \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ comme reste de série convergente, et donc

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n_i} = \sum_{n_i nP} u_n$$

ce qui donne (i), et prouve (ii)⇒(i), comme voulu.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.13.** (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par croissance et du fait que $q_0 \geqslant 2$

$$q_0 \ldots q_n \geqslant 2^{n+1}$$

d'où $0 \leqslant \dfrac{1}{q_0 \ldots q_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et la convergence de $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}}$ entraîne celle de $\sum \dfrac{1}{q_0 \ldots q_n}$.

(b) Tout d'abord, pour tout $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}$, avec la majoration précédente

$$0 < \frac{1}{q_0} \leqslant \varphi(q) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

et on a bien $\varphi : \mathscr{S} \to ]0,1]$.

$*$ $\varphi$ est injective. En effet, soit $(q,r) \in \mathscr{S}^2$ tel que $\varphi(q) = \varphi(r)$. Supposons $q_0 \neq r_0$, par exemple $q_0 < r_0$, c'est-à-dire $r_0 \geqslant q_0+1$ puisque ce sont des entiers. Alors $\varphi(q) > \dfrac{1}{q_0}$ et

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r_0 \ldots r_n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r_0^{n+1}} = \frac{1}{r_0-1} \leqslant \frac{1}{q_0}.$$

Ceci est absurde et montre que $q_0 = r_0$. L'égalité $\varphi(q) = \varphi(r)$ entraîne alors après multiplication par $r_0 = q_0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \ldots q_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r_1 \ldots r_n}$$

ce qui permet de réitérer le raisonnement précédent. On a donc bien $q = r$ par une récurrence directe.

$*$ Le constat précédent permet d'intuiter un procédé de construction, pour $x \in ]0,1]$, d'une suite $q \in \mathscr{S}$ telle que $x = \varphi(q)$. Il existe un unique $q_0 \geqslant 2$ tel que $\dfrac{1}{q_0} < x \leqslant \dfrac{1}{q_0-1}$, à savoir $q_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$. On a alors

$$0 < q_0 x - 1 \leqslant \frac{q_0}{q_0-1} - 1 = \frac{1}{q_0-1} \leqslant 1.$$

On peut donc poser $x_1 = q_0 x - 1 \in ]0,1]$, puis $q_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_1} \right\rfloor + 1$ qui est l'unique entier tel que $\dfrac{1}{q_1} < x_1 \leqslant \dfrac{1}{q_1-1}$, donc

$$\frac{1}{q_1} < q_0 x - 1 \leqslant \frac{1}{q_1-1} \iff \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} < x \leqslant \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0(q_1-1)}.$$

En outre, $x_1 = q_0 x - 1 \leqslant \dfrac{1}{q_0-1} \Rightarrow q_1 \geqslant \lfloor q_0 - 1 \rfloor + 1 = q_0$, comme voulu.

Formalisons : pour tout $x \in ]0,1]$, on définit les suites $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$, $q_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_0} \right\rfloor + 1 \geqslant 2$, $x_1 = q_0 x_0 - 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$ et $x_{n+1} = q_n x_n - 1$. Notons que de la sorte, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{q_n} < x_n \leqslant \frac{1}{q_n - 1} \iff 0 < x_{n+1} = q_n x_n - 1 \leqslant \frac{1}{q_n - 1}$$

puis $q_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{1}{x_{n+1}} \right\rfloor + 1 \geqslant q_n$ si bien que $q \in \mathscr{S}$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{q_0 \dots q_n} = x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 \dots q_k}.$$

L'égalité $x_1 = q_0 x_0 - 1$ fournit bien $\dfrac{x_1}{q_0} = x - \dfrac{1}{q_0}$ et l'initialisation. Si ce résultat est vrai au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$x_{n+1} = q_n x_n - 1 \iff \frac{x_{n+1}}{q_0 \dots q_n} = \frac{x_n}{q_0 \dots q_{n-1}} - \frac{1}{q_0 \dots q_n} = x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q_0 \dots q_k} - \frac{1}{q_0 \dots q_n} = x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 \dots q_k}$$

ce qui démontre l'hérédité et achève la récurrence. L'encadrement $\dfrac{1}{q_{n+1}} < x_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{q_{n+1} - 1}$ fournit alors

$$\frac{1}{q_0 \dots q_{n+1}} < x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 \dots q_k} \leqslant \frac{1}{q_0 \dots q_n (q_{n+1} - 1)}$$

et donc $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_k} = \varphi(q)$ en faisant tendre $n$ vers l'infini. Ceci démontre la surjectivité, donc la bijectivité de $\varphi$ de $\mathscr{S}$ sur $]0,1]$.

(c) Soit $q \in \mathscr{S}$ stationnaire, notons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q_{n+1} = q_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a alors

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{q_0 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 \dots q_{n_0-1}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{q_{n_0}^{n-n_0+1}} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{q_0 \dots q_n} + \frac{1}{q_0 \dots q_{n_0-1}(q_{n_0} - 1)}$$

visiblement rationnel comme somme de rationnels.

Supposons réciproquement que $q \in \mathscr{S}$ n'est pas stationnaire, et que $\varphi(q) \in \mathbb{Q} \cap ]0,1]$ : il existe $(k,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \leqslant p$, $k \wedge p = 1$ et $\varphi(q) = \dfrac{k}{p}$. Comme $q$ n'est pas stationnaire et qu'il s'agit d'une suite croissante d'entiers, elle n'est pas majorée (sinon elle serait convergente donc stationnaire). Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}, q_n > p+1\}$. On sait alors avec la question précédente que

$$\frac{1}{q_0 \dots q_{n_0+1}} < \frac{k}{p} - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{q_0 \dots q_k} \leqslant \frac{1}{q_0 \dots q_{n_0}(q_{n_0+1} - 1)}$$

d'où en multipliant par $q_0 \dots q_{n_0} p$

$$\frac{p}{q_{n_0+1}} < k q_0 \dots q_{n_0} - p \sum_{k=0}^{n_0} q_{k+1} \dots q_{n_0} \leqslant \frac{p}{q_{n_0+1} - 1}.$$

Or $0 < \dfrac{p}{q_{n_0+1}} < \dfrac{p}{q_{n_0+1} - 1} < 1$ par définition de $n_0$, alors que $k q_0 \dots q_{n_0} - p \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} q_{k+1} \dots q_{n_0} \in \mathbb{Z}$. Ceci est absurde, et démontre que $\varphi(q) \notin \mathbb{Q}$. On a démontré par contraposée que $\varphi(q) \in \mathbb{Q} \Rightarrow q$ stationnaire.

Comme $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, on a $\mathrm{e} - 2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \varphi(q)$ où $q_n = n+2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $q$ n'est pas stationnaire, $\mathrm{e} - 2 \notin \mathbb{Q}$, donc $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**Études asymptotiques : séries télescopiques, comparaison avec des intégrales, sommations de relations de comparaison**

**E-10.14.** (a) Par décroissance de $f$ sur $[n-1, n]$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n-1) \qquad (*)$$

d'où

$$0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n).$$

$\sum (f(n-1) - f(n))$ converge par télescopage car $f$ possède une limite finie (application décroissante positive) donc $\sum w_n$ aussi par encadrement.

(b) En sommant $(*)$ pour $n$ allant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$, il vient en décalant l'indice de la dernière somme

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$$

d'où $\sum_{n=0}^{N} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une part, $f(N) + \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n)$ d'autre part, et donc

$$f(N) \leqslant \sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(0)$$

et comme $\lim_{N\to+\infty} \int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, les termes encadrants sont négligeables devant $\int_0^N f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne bien l'équivalent souhaité.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.15.** (a) On a

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\ln(n-1)^2 - \frac{1}{2}\ln(n)^2 = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\ln(n)^2 = \frac{\ln n}{n} + \ln n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

Or $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\ln n}{n} + \ln n\left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{\ln(n)}{2n^2}\right)$$

de sorte que $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissances comparées, et $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge absolument, donc $u$ converge par télescopage.

(b) $\sum \frac{(-1)^p \ln p}{p}$ converge par application directe du critère des séries alternées, $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ étant décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ par une étude de fonction évidente. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En enlevant et rajoutant deux fois les termes pairs, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^p \ln p}{p} &= \sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^p \ln p}{p} - 2\sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p)}{2p} + 2\sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2p)}{2p} \\
&= -\sum_{p=1}^{2N} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p=1}^{N} \frac{\ln(2) + \ln p}{p} \\
&= \ln 2 \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} + u_N + \frac{1}{2}\ln(N)^2 - u_{2N} - \frac{1}{2}\ln(2N)^2 \\
&= \ln 2 \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} + u_N - u_{2N} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2 \ln N \\
&= \ln 2\left(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} - \ln N\right) + u_N - u_{2N} - \frac{(\ln 2)^2}{2}
\end{aligned}$$

si bien qu'en faisant tendre $N$ vers l'infini, on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln p}{p} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.16.** $u$ est clairement croissante.
Si $u$ converge, c'est vers une limite $\ell \geqslant u_0 > 0$, d'où

$$a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell(u_{n+1} - u_n)$$

terme général d'une série convergente par télescopage.
Si $u$ diverge, c'est vers $+\infty$, et

$$a_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$$

donc $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$ et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ diverge, donc $\sum a_n$ également.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.17.** On pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $v_{n+1} = v_n - \frac{n+2}{(n+1)!}$ puis

$$v_n = v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+1)!} = u_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+1)!}.$$

Si $v$ ne converge pas vers 0, alors $u_n = n!v_n$ ne peut rester bornée quand $n$ tend vers l'infini. On en déduit qu'il faut nécessairement que

$$u_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+2}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) = 2\mathrm{e} - 1$$

la convergence de toutes les séries étant assurée puisque ce sont des séries exponentielles.

Réciproquement, si $u_0 = 2\mathrm{e} - 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = n!v_n = n! \left( 2\mathrm{e} - 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{(k+1)!} \right) = n! \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \right).$$

Or

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

et en utilisant l'inégalité $(p+q)! \geqslant p!q!$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(k-n-1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Il vient

$$n! \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{n+1} + n! \left( \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right)$$

et ce dernier terme tendant vers 0 avec ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} n! \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} n! \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = 0$, et l'on aboutit à la convergence de $u$ vers 1. $u$ est donc en particulier bornée dans ce cas, ce qui permet de conclure.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.18.** On a

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n}{n+a} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et par la règle de Raabe-Duhamel (voir TD)

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}$$

donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.19.** Pour les détails, on s'inspirera de l'exercice de TD sur la règle « faible » de Raabe-Duhamel.

(a) On a

$$\ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) \sim \frac{\beta - \alpha}{n}$$

d'où $\ln(w_n)$ tend vers $-\infty$ puis $u_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

(b) Même travail avec $\beta \in ]\alpha, 1[$, on montre cette fois que $\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.20.** Pour $n \geqslant 3$, on a par croissance de $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$

$$\frac{1}{\ln(2n)} \int_n^{2n} x\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{x}{\ln x} \mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_{n+1}^{2n+1} \frac{x}{\ln x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \int_{n+1}^{2n+1} x\mathrm{d}x.$$

Or $\frac{1}{\ln(2n)} \int_n^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{3n^2}{2\ln(n) + 2\ln 2}$ et $\frac{1}{\ln(n+1)} \int_{n+1}^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{3n^2 + 2n}{2\ln(n+1)}$ ce qui donne aussitôt $u_n \sim \frac{3n^2}{2\ln n}$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.21.** Soit $x \in ]0,1[$ fixé. Il est immédiat que l'application $\varphi : t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$ puisque $\ln x < 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle l'est sur $[n, n+1]$ si bien que pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $x^{t^2} \leqslant x^{n^2}$ et par intégration

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} x^{n^2} \mathrm{d}t = x^{n^2}.$$

De façon analogue, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$x^{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{t^2} \mathrm{d}t.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, il vient par sommation des inégalités précédentes et par la relation de Chasles

$$\int_0^{N+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} x^{n^2} = S_N(x) \leqslant \int_0^N x^{t^2}\,\mathrm{d}t + 1.$$

Pour $t \geqslant 1$, on a $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et $\varphi$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc faire tendre $N$ vers $+\infty$ dans la double inégalité de la question précédente. Il vient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t + 1.$$

Calculons maintenant la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln x}\mathrm{d}t$ par le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln x}}$. Il vient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{I}{\sqrt{-\ln x}}$$

avec l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. On a alors l'encadrement

$$\sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} + 1 \iff 0 \leqslant f(x) - \sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} \leqslant 1$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} = +\infty$, on a $f(x) - \sqrt{\dfrac{\pi}{-\ln x}} \underset{x\to1^-}{=} o\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{-\ln x}}\right)$ de sorte que

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.22.** (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_{n+1}$ par récurrence et $u_{n+1} \leqslant u_n$ par inégalité de concavité usuelle. $u$ converge donc vers 0, seule solution de $\sin x = x$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n)^3\right)^\alpha - u_n^\alpha \sim -u_n^\alpha \frac{\alpha u_n^2}{6}$$

qui possède une limite finie non nulle si et seulement $\alpha = -2$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

et la série de terme général constant (positif) $\dfrac{1}{3}$ étant grossièrement divergente, on a par sommation d'équivalents et télescopage

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

de sorte que

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

d'où

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

(c) On a

$$\sin^2 t = \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{2t^6}{45} + o(t^6)$$

d'où

$$\frac{t^2 - \sin^2 t}{t^2\sin^2 t} = \frac{\dfrac{t^4}{3} - \dfrac{2t^6}{45} + o(t^6)}{t^4 - \dfrac{t^6}{3} + o(t^6)} = \frac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{2t^2}{45} + o(t^2)}{1 - \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2t^2}{45}\right)\left(1 + \frac{t^2}{3}\right) + o(t^2) = \frac{1}{3} + \frac{t^2}{15} + o(t^2).$$

Il vient

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}.$$

On en déduit de même par sommation
$$\frac{1}{u_n^2}=\frac{n}{3}+\frac{\ln n}{5}+o(\ln n).$$
On obtient ainsi
$$u_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{3}+\frac{\ln n}{5}+o(\ln n)}}=\sqrt{\frac{3}{n}}\left(1+\frac{3\ln n}{5n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{n}}\left(1-\frac{3\ln n}{10n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$
$$=\sqrt{\frac{3}{n}}-\frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.23.** (a) $f : x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x}$ est croissante donc $u$ est monotone : elle est décroissante car
$$u_1=1-\mathrm{e}^{-u_0}\leqslant u_0$$
par concavité, puis tend vers 0, seul point fixe de $f$.

(b) Elle converge immédiatement par le critère des séries alternées.

(c) On a
$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{u_n-1+\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n(1-\mathrm{e}^{-u_n})}=\frac{\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)}{u_n^2+o(u_n^2)}\to\frac{1}{2}$$
d'où
$$\frac{1}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{2}$$
par sommation d'équivalents et donc $u_n\sim\frac{2}{n}$, et $\sum u_n$ diverge.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.24.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a par comparaison série-intégrale classique
$$0\leqslant u_n f(S_n)\leqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}f(t)\mathrm{d}t$$
ce qui montre (i)⇒(ii) puisque $\sum\int_{S_{n-1}}^{S_n}f(t)\mathrm{d}t$ converge par la relation de Chasles.

La réciproque est fausse : considérer $u_n=\mathrm{e}^{(n+1)^2}-\mathrm{e}^{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $f : t\mapsto\frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$. On a alors $S_n=\mathrm{e}^{(n+1)^2}-1$ donc
$$u_n f(S_n)=\frac{\mathrm{e}^{(n+1)^2}-\mathrm{e}^{n^2}}{(\mathrm{e}^{(n+1)^2}+1)\ln(\mathrm{e}^{(n+1)^2}+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$$
donc $\sum u_n f(S_n)$ converge, tandis que pour tout $x>0$
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\ln(\ln(x+2))-\ln(\ln 2)$$
diverge vers l'infini donc $f$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.25.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a
$$\ln(nu_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1)=\frac{1}{n}S_n$$
Par comparaison usuelle série-intégrale, il vient pour tout $k\geqslant 2$
$$\int_{k-1}^{k}\ln(3x-1)\mathrm{d}x\leqslant\ln(3k-1)$$
et pour $k\geqslant 1$
$$\ln(3k+2)\leqslant\int_k^{k+1}\ln(3x-1)\mathrm{d}x$$
puis en sommant la première de 2 à $n\geqslant 2$ et la seconde de 1 à $n-1$
$$\ln 2+\int_1^n\ln(3x-1)\mathrm{d}x\leqslant S_n\leqslant\int_1^n\ln(3x-1)\mathrm{d}x+\ln(3n-1).$$

Or

$$\int_1^n \ln(3x-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}((3x-1)\ln(3x-1)-(3x-1))\right]_1^n$$
$$= \frac{1}{3}((3n-1)\ln(3n-1)-(3n-1)) - \frac{1}{3}(2\ln(2)-2)$$
$$= \left(n-\frac{1}{3}\right)\left(\ln(n)+\ln(3)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(2\ln(2)-2)$$
$$= n\ln(n) + (\ln(3)-1)n + O(\ln(n)).$$

On en tire

$$nu_n = \exp\left(\ln(n)+(\ln(3)-1)+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = 3\mathrm{e}^{-1}n\exp\left(O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3\mathrm{e}^{-1}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.26.** (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $S_n > u_n$ car $u_0 > 0$ donc $1 - \dfrac{u_n}{S_n} > 0$ ce qui justifie l'existence du logrithme de cette quantité. On a pour tout $n \geqslant 1$

$$\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_n-u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln S_{n-1} - \ln S_n.$$

On a donc pour tout $N \geqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right) = S_0 - S_N$ par télescopage de termes. On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right) = -\infty$ et que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ est donc divergente.

Si $\dfrac{u_n}{S_n}$ ne converge pas vers 0, la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ est grossièrement divergente. Dans le cas contraire, on a

$$\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{S_n}.$$

Comme $-\dfrac{u_n}{S_n} \leqslant 0$ est de signe constant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que les séries $\sum \ln\left(1-\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ et $-\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ sont de même nature, donc divergentes. La série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ est donc divergente dans tous les cas.

(b) Comme $S_n > 0$ diverge vers $+\infty$, on a $S_n > 1$ pour $n$ assez grand, d'où pour $\alpha \leqslant 1$

$$0 \leqslant \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{S_n^\alpha}\right).$$

D'après le théorème de comparaison asymptotique pour les séries à termes positifs, la divergence de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ implique celle de $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc pour tout $t \in [S_{n-1}, S_n]$

$$\frac{1}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \iff \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et finalement $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. D'après la relation de Chasles, on obtient en sommant les inégalités précédentes pour $n$ variant de 1 à $N \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \iff \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{S_N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

puis, comme $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente comme intégrale de Riemann et que la fonction intégrée est positive, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = M \in \mathbb{R}_+^*.$$

La série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente d'après le théorème fondamental.

(c) ∗ Si $\alpha = 0$, on a $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha} = u_n$ et la convergence de $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ est immédiate.

$\ast$ Si $\alpha < 0$, comme $R_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on a

$$0 \leqslant \frac{u_n}{R_n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

et le théorème de comparaison asymptotique pour les séries à termes positifs permet de conclure que $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ est convergente.

$\ast$ Si $0 < \alpha < 1$. la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc pour tout $t \in [R_{n+1}, R_n]$, $\frac{1}{R_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ et par croissance de l'intégrale

$$\int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}t}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \iff \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

d'où $\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. Par un argument analogue à celui employé en (b), on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{R_n^\alpha} \leqslant \int_0^{R_0} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = M \in \mathbb{R}_+^*$$

puisque $\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente pour $\alpha < 1$. Ceci prouve la convergence de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

$\ast$ Si $\alpha = 1$, en posant $v_n = \ln\left(1 - \frac{u_n}{R_n}\right) = \ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)$, on montre de façon analogue à la première question que $\sum \frac{u_n}{R_n}$ diverge (la disjonction de cas est toujours présente).

$\ast$ Enfin, si $\alpha > 1$, l'encadrement $\frac{u_n}{R_n^\alpha} \geqslant \frac{u_n}{R_n} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre la divergence de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

(d) La réponse est non en général. Prenons l'exemple suivant : $u_n = 2^{-2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ est absolument convergente. On a alors

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-2^k} = 2^{-2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{2^{n+1}-2^k} = 2^{-2^{n+1}} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} 2^{2^{n+1}-2^k}\right).$$

Or, pour $k \geqslant n+2 \iff k-1 \geqslant n+1$, $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1} \geqslant 2^{k-1} + 2^{n+1}$ si bien que $2^k - 2^{n+1} \geqslant 2^{k-1}$. On en déduit que

$$T_n \leqslant 2^{-2^{n+1}} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} 2^{-2^{k-1}}\right) = 2^{-2^{n+1}} \left(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-2^k}\right) = 2^{-2^{n+1}}(1 + T_n).$$

Il vient pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\frac{u_n}{T_n^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{2^{-2^n}}{2^{-\frac{1}{2}2^{n+1}}\sqrt{1+T_n}} = \frac{1}{\sqrt{1+T_n}}.$$

Cette dernière quantité tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$, si bien que $\sum \frac{u_n}{T_n^{\frac{1}{2}}}$ diverge grossièrement, contrairement à $\sum \frac{u_n}{R_n^{\frac{1}{2}}}$ avec la question précédente.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.27.** (a) $u_0 = a$ et par récurrence, si $(u_0, \ldots, u_n)$ sont définis

$$u_{n+1} + S_n = u_{n+1} S_n \iff u_{n+1} = \frac{S_n}{S_n - 1}$$

et $u_{n+1}$ est encore uniquement défini, en notant que $S_n \geqslant S_0 = a > 1$.

(b) La relation $u_{n+1} = \frac{S_n}{S_n - 1}$ obtenue ci-dessus montre par une récurrence directe que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} + u_n + S_{n-1} = u_{n+1} u_n S_{n-1}$$

et

$$u_n + S_{n-1} = u_n S_{n-1} \iff S_{n-1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

d'où

$$u_{n+1} + u_n + \frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{u_{n+1} u_n^2}{u_n - 1} \iff u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1}.$$

Remarquons que cette relation n'est pas vérifiée *a priori* pour $n = 0$.

(c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 1 (classique par étude de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$). Avec $v_n = u_n - 1$, on a $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n^2 + v_n + 1}$ puis

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = 1 + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

d'où $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \iff v_n \sim \frac{1}{n}$ par sommation d'équivalents puisque 1 est positive et terme général d'une série divergente. Il vient directement
$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} - 1 = v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
ce qui donne de nouveau par sommation d'équivalents
$$\frac{1}{v_n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$
d'où
$$v_n = (n + \ln n + o(\ln(n)))^{-1} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$
Il vient bien
$$u_n = 1 + v_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.28.** Si $u$ converge, alors $m$ aussi (théorème de Cesàro, qu'on peut retrouver comme dans le cours par sommation de $o$) et donc $t$ aussi.

Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ell$, on peut, quitte à considérer la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramener au cas où $\ell = 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$t_n = \alpha u_n + (1-\alpha) m_n = \alpha((n+1)m_n - n m_{n-1}) + (1-\alpha) m_n = (\alpha n + 1) m_n - \alpha n m_{n-1}. \qquad (*)$$
On applique le principe de résolution des équations linéaires pour exprimer $m$ en fonction de $t$ à partir de $(*)$.

$*$ Avec la convention qu'un produit vide vaut 1, les suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$(\alpha n + 1) m_n - \alpha n m_{n-1} = 0$$
sont de la forme $\left(\lambda \frac{\alpha^n n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} (\alpha k + 1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose
$$z_n = \frac{\alpha^n n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} (\alpha k + 1)}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui vérifie donc $(\alpha n + 1) z_n = \alpha n z_{n-1}$.

$*$ On cherche par la « méthode de variation de la constante » une solution particulière de
$$(\alpha n + 1) m_n - \alpha n m_{n-1} = t_n$$
sous la forme
$$m_n = \lambda_n z_n$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à déterminer. Il vient par report pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$(\alpha n + 1)\lambda_n z_n - \alpha n \lambda_{n-1} z_{n-1} = t_n \iff \alpha n \lambda_n z_{n-1} - \alpha n \lambda_{n-1} z_{n-1} = t_n$$
et donc
$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{t_n}{\alpha n z_{n-1}}$$
puis par sommation et télescopage
$$\lambda_n = \lambda_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{t_\ell}{\alpha \ell z_{\ell-1}}.$$
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$m_n = z_n\left(\lambda + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{t_\ell}{\alpha \ell z_{\ell-1}}\right).$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha n}{\alpha n + 1} = 1 - \frac{1}{\alpha n + 1} = 1 - \frac{1}{\alpha n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Avec la règle de Raabe-Duhamel (voir TD), on en déduit qu'il existe un réel $r > 0$ tel que
$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{r}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

et donc d'une part que $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$, et d'autre part que

$$\frac{1}{\alpha \ell z_{\ell-1}} \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{r}{\alpha n^{1+\frac{1}{\alpha}}}$$

qui est le terme général d'une série convergente positive, et donc

$$\frac{t_\ell}{\alpha \ell z_{\ell-1}} \underset{\ell\to+\infty}{=} o\left(\frac{r}{\alpha n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

ce qui prouve la convergence absolue de $\sum \frac{t_\ell}{\alpha \ell z_{\ell-1}}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = 0$$

puis que $u_n = \frac{1}{\alpha}(t_n - (1-\alpha))m_n$ converge également vers 0, ce qu'on voulait.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.29.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. L'idée est de majorer $a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha$ par le terme général d'une série dont on sait calculer la somme, en l'occurrence une série télescopique. Partant du fait que pour tout $x \in [0,1]$, on a par convexité

$$(1-x)^\alpha \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k} - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\alpha a_k} = (1-\mathrm{e}^{-\alpha a_n}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}$$

on va démontrer que

$$a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha a_n}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}.$$

Tout d'abord, on a donc par convexité

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-a_k)^\alpha \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}.$$

D'autre part, en posant

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}) - x(1-x)^\alpha$$

qui est de classe $C^1$ sur $[0,1]$, on a pour tout $x \in [0,1]$

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} - (1-x)^\alpha + \alpha x(1-x)^{\alpha-1} \geqslant \alpha x(1-x)^{\alpha-1} \geqslant 0$$

et $\varphi(0) = 0$ de sorte que $\varphi$ est positive sur $[0,1]$ et donc en particulier

$$a_n(1-a_n)^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha a_n})$$

ce qui donne bien pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha a_n}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha a_k} - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-\alpha a_k}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

La série $\sum a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha$ étant à terme général positif et à sommes partielles majorées est convergente, et on a de plus en faisant tendre $N$ vers l'infini

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit donc l'existence de $C$, ainsi que la majoration

$$C \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

De plus, en prenant $a_n = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\lambda \in ]0,1[$ fixé, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda \prod_{k=1}^{n}(1-\lambda)^\alpha = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\lambda)^{n\alpha} = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^\alpha}$$

si bien que

$$\frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^{\alpha}} \leqslant C.$$

Or

$$1-(1-\lambda)^{\alpha} \underset{\lambda\to 0}{\sim} \alpha\lambda$$

si bien que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}$$

et donc $C \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$ et finalement

$$C = \frac{1}{\alpha}.$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**Séries numériques de terme général quelconque, séries alternées**

**E-10.30.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. Si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors $\sum (w_n - u_n)$ aussi, donc $\sum (v_n - u_n)$, puis $\sum v_n$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.31.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ d'où

$$\frac{u_n}{u_n+v_n} = \frac{\frac{u_n}{v_n}}{1+\frac{u_n}{v_n}} = \frac{u_n}{v_n} - \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2\right).$$

Comme $\sum \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2$ est convergente et à termes positifs, le reste ci-dessus est le terme général d'une série convergente, et $\sum \dfrac{u_n}{u_n+v_n}$ converge comme somme de trois séries convergentes.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.32.** (a) Supposons que $\ell < 1$, et posons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \ell + \varepsilon$$

ce qui donne

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant (\ell+\varepsilon)^n.$$

Comme $\ell + \varepsilon < 1$, $\sum |u_n|$ est convergente par majoration, donc $\sum u_n$ l'est. Le raisonnement est le même pour $\ell > 1$.

On ne peut pas conclure en général dans le cas $\ell = 1$ puisque par exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(b) On a classiquement

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{(\ln n)^2 - n\ln(\ln n)}{n}\right) = 0$$

si bien que ces deux séries sont convergentes.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.33.** (a) $|u_n| = n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ et $\sum u_n$ est absolument convergente.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{3n} = \frac{(-1)^n}{\ln(3n)} \quad ; \quad u_{3n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(3n+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad u_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{\ln(3n+2)-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

de sorte que $\sum u_{3n}$, $\sum u_{3n+1}$ et $\sum u_{3n+2}$ vérifient le critère des séries alternées et sont convergentes. Leur somme $\sum u_n$ converge donc aussi.

(c) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + r_n$ où $r_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées, $\sum r_n$ converge absolument, et $\sum \dfrac{1}{8n}$ diverge de sorte que $\sum u_n$ diverge.

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{2n^{\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right).$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est convergente par application directe du critère des séries alternées. De plus

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$$

est négatif. On en déduit que $\sum \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ est de même nature que $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$, donc que $\sum u_n$ est de même nature que cette dernière série, c'est-à-dire convergente si et seulement si $\alpha > \frac{2}{3}$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en ajoutant et soustrayant deux fois les termes d'indices multiples de 3

$$\sum_{k=1}^{3n} u_k = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et par comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

donc

$$\sum_{k=1}^{3n} u_k = 2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{n}$$

d'où $\sum u_n$ diverge.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.34.** (a) La suite $a$ définie par $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ convient, puisqu'alors $\frac{1}{n^2 a_n} = a_n$ et que $\sum a_n$ converge par le critère des séries alternées.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strcitement positives. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n} \frac{1}{n\sqrt{a_n}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 a_n}\right).$$

La convergence simultanée de $\sum a_n$ et $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ entrainerait donc celle de $\sum \frac{1}{n}$, ce qui est exclu.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.35.** $u$ décroît vers 0 et le critère des séries alternées montre la convergence de $\sum (-1)^n u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en regroupant les termes consécutifs deux par deux, il vient

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2}\right).$$

Or

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4^n (n!)^2}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} = \frac{((2n)!)^2 (2n+1)}{16^n (n!)^4}.$$

Par la formule de Stirling

$$((2n)!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} 4\pi n$$

et

$$(n!)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} 4\pi^2 n^2$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} = \frac{2}{\pi}$$

et $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.36.** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en regroupant les termes consécutifs

$$b_{2p} = \sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k+1}\sqrt{k} = \sum_{k=1}^{p}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}}.$$

Or

$$\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1} = \sqrt{2k}+\sqrt{2k+o(k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2k}$$

et comme $\sum \frac{1}{2\sqrt{2k}}$ est divergente et à termes positifs

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2\sqrt{2k}}$$

puis par une comparaison série-intégrale banale

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} -\sqrt{\frac{p}{2}}.$$

En outre

$$b_{2p+1} = b_{2p}+\sqrt{2p+1} = -\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{2p}+o(\sqrt{p}) \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{p}{2}}$$

ce qui donne en général

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.37.** On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n^2 = \mathrm{Re}(u_n)^2 + 2i\,\mathrm{Re}(u_n)\,\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(u_n)^2 = 2u_n\,\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(u_n)^2 - \mathrm{Im}(u_n)^2$$

ce qui donne

$$|u_n|^2 = 2u_n\,\mathrm{Re}(u_n) - u_n^2.$$

Comme $\sum u_n$ converge, on a d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc

$$2u_n\,\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{Re}(u_n))$$

et d'autre part $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ converge et est positive, donc $\sum u_n\,\mathrm{Re}(u_n)$ est absolument convergente. Finalement, $\sum |u_n|^2$ est convergente comme somme de séries convergentes, ce qu'on voulait.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.38.** (a) On montre par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ : c'est immédiat pour $n = 0$, et si on le suppose au rang $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors

$$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \leqslant \sqrt{n+\sqrt{2(n-1)}}$$

Or

$$n^2 - 2(n-1) = (n-1)^2 + 1 \geqslant 0$$

donc $n \geqslant \sqrt{2(n-1)}$ par croissance de la racine carrée puis

$$u_n \leqslant \sqrt{2n}$$

comme voulu, ce qui conclut la récurrence. On en déduit que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \text{ puis } \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $\sum \frac{1}{u_n^2}$ diverge (tout est positif).

(b) On a $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ donc

$$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n+\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \sqrt{n}+\frac{1}{2}+o(1)$$

puis

$$
\begin{aligned}
u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n+\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}+o(1)} &= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{8(\sqrt{n})^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8n}+\frac{1}{(2\sqrt{n})^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

Il vient

$$
\frac{(-1)^n}{u_n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^n}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
$$

et $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge comme somme de séries convergentes.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.39.** Par la formule de Taylor à reste intégral entre 0 et 1, on a

$$
\ln 2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t
$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$, donc $f^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. La majoration

$$
\left|(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1(1-t)^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}
$$

montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ et donc par continuité de l'exponentielle, $u_n$ converge vers 0. En outre, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$
u_n = 2\left(1-\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\ln 2\right)\right) = 2(1-\mathrm{e}^{-R_n})
$$

où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Le théorème des séries alternées permet d'affirmer que $R_n$ décroît vers 0 et est du signe de $(-1)^n$, donc alterné. Il en va donc de même de $1-\mathrm{e}^{-R_n}$ et donc de $u_n$. De nouveau, par le critère des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.40.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f : t \mapsto \dfrac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Le cas $x=0$ étant trivial, on l'élimine de l'étude et on a alors

$$
\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} x\sqrt{t}
$$

si bien que $f$ est intégrable sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité, et

$$
\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)
$$

par croissances comparées, et l'intégrabilité de $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$ donne celle de $f$ par le théorème de comparaison asymptotique.

Supposons $x>0$. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\frac{N\pi}{x}}\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N}\int_{\frac{(n-1)\pi}{x}}^{\frac{n\pi}{x}}\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

puis avec le changement de variable affine $t=u+\dfrac{(n-1)\pi}{x}$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{x}}^{\frac{n\pi}{x}}\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\pi}{x}}\int_0^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin(xu+(n-1)\pi)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{(n-1)\pi}{x}}}\mathrm{d}u=(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\pi}{x}}\int_0^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin(xu)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{(n-1)\pi}{x}}}\mathrm{d}u.$$

Pour tout $u\in\left[0,\dfrac{\pi}{x}\right]$, $\dfrac{\sin(xu)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{(n-1)\pi}{x}}}\geqslant 0$ de sorte que si l'on pose $u_n=(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\pi}{x}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin(xu)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{(n-1)\pi}{x}}}\mathrm{d}u$, la série $\sum u_n$ est alternée. En outre, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\pi}{x}}\int_0^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin(xu)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{(n-1)\pi}{x}}}\mathrm{d}u<\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{x}}\int_0^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin(xu)\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u+\frac{n\pi}{x}}}\mathrm{d}u$$

par stricte décroissance en $n$. Le critère des séries alternées s'applique donc, et $\sum u_n$ est convergente et sa somme est du signe (strict) de son premier terme $u_1$ qui est positif. Par passage à la limite on a enfin

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n>0.$$

Par imparité, on a un signe négatif pour $x<0$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.41.** (a) Si l'un des deux était fini, la suite $u$ serait de signe constant à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ serait absolument convergente. De même, si l'une était convergente, l'autre le serait aussi, et de nouveau la série serait absolument convergente.

(b) On suppose d'abord que $x\geqslant 0$. D'après la question précédente, on peut définir

$$n_0=\min\{k\in\mathbb{N},\sum_{i=0}^{k}u_{\varphi(i)}>x\}$$

de sorte que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n_0-1}u_{\varphi(i)}\leqslant x<\sum_{i=0}^{n_0}u_{\varphi(i)}$ et donc

$$\left|\sum_{i=0}^{n_0}u_{\varphi(i)}-x\right|\leqslant u_{\varphi(n_0)}.$$

On définit alors

$$\sigma(i)=\varphi(i)$$

pour tout $i\in[\![0,n_0]\!]$. On pose ensuite

$$n_1=\min\{k>n_0,\sum_{i=0}^{n_0}u_{\varphi(i)}+\sum_{i=n_0+1}^{k}u_{\psi(i)}<x\}$$

et

$$\sigma(i)=\psi(i)$$

pour tout $i\in[\![n_0+1,n_1]\!]$, qui vérifient $\left|\displaystyle\sum_{i=0}^{n_1}u_{\sigma(i)}-x\right|\leqslant u_{\psi(n_1)}$. En réitérant ce procédé (récurrence), on construit une bijection $\sigma$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

$$S_{n_{2k-1}}<x<S_{n_{2k}}$$

et

$$|S_{n_{2k}}-x|\leqslant u_{\varphi(n_{2k})}$$

$$|S_{n_{2k+1}}-x|\leqslant u_{\psi(n_{2k+1})}$$

d'où l'on déduit bien que $x=\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}u_{\sigma(i)}$. Si $x<0$, on procède de même en échangeant les rôles de $N$ et $P$.

(c) On procède de même avec par exemple le motif suivant : on dépasse 1, on redescend en-dessous de 0, on dépasse 2, on descend en dessous de 1, on dépasse 3, *etc.*

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, séries exponentielles**

**E-10.42.** Si tous les coefficients de $A$ sont strictement positifs, par la formule du produit matriciel, on a par une récurrence facile que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k$ est à coefficients strictement positifs, et donc

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

aussi. Dans le cas général, on note $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ : soit $\lambda = 1 + \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |a_{k,k}|$, alors $B = \lambda I_n + A$ a tous ses coefficients strictement positifs, si bien que $\mathrm{e}^B$ aussi. Or

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{B-\lambda I_n} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^B$$

et donc $\mathrm{e}^A$ a tous ses coefficients strictement positifs.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.43.** Supposons qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $|\varphi(M)| > \|M\|$. On a alors

$$\left\| \frac{M}{\varphi(M)} \right\| = \frac{\|M\|}{|\varphi(M)|} < 1$$

de sorte que $I_n - \dfrac{M}{\varphi(M)}$ est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{M}{\varphi(M)}\right)^k$ (voir cours). Par propriété de morphisme d'algèbres, on a $\varphi(I_n) = 1$, d'où

$$\varphi\left(\left(I_n - \frac{M}{\varphi(M)}\right)^{-1}\right) = \varphi\left(\left(I_n - \frac{M}{\varphi(M)}\right)\right)^{-1} = \left(\varphi(I_n) - \frac{\varphi(M)}{\varphi(M)}\right)^{-1} = \frac{1}{0}$$

ce qui est absurde. On a donc $|\varphi(M)| \leqslant \|M\|$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, qui s'étend directement à $M = 0$, ce qui montre à la fois la continuité de $\varphi$ et $|||\varphi||| \leqslant 1$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.44.** (a) Si $x \in \mathrm{Im}(u - I) \cap \mathrm{Ker}(u - I)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$, et $u(x) = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = nx$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = u^n(y) - y$$

par télescopage. On en déduit que

$$n\|x\| = \|u^n(y) - y\| \leqslant \|u^n(y)\| + \|y\| \leqslant M + \|y\|$$

où $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u^n(y)\|$. Ceci impose $x = 0$ en faisant tendre $n$ vers l'infini et donc $\mathrm{Im}(u - I) \cap \mathrm{Ker}(u - I) = \{0\}$. On conclut à $\mathrm{Im}(u - I) \oplus \mathrm{Ker}(u - I) = E$ par argument de dimension puisque le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(u - I) + \dim \mathrm{Ker}(u - I) = \dim E$.

(b) Avec les calculs précédents, on a $v_n(x) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $x \in \mathrm{Ker}(u - I)$ et

$$\|v_n(x)\| \leqslant \frac{M + \|y\|}{n}$$

lorsque $x = u(y) - y \in \mathrm{Im}(u - I)$ ce qui permet de conclure en décomposant tout vecteur de $E$ selon ces deux sous-espaces.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.45.** À l'aide d'une transformation d'Abel, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) = nS_n - u_0 - \sum_{k=1}^{n-1} S_k.$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} S_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ par sommation de $o$, la série $\sum 1$ étant divergente à termes positifs, ce qui conclut.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.46.** (a) Si $A = D + N$ avec $DN = ND$, $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^D\mathrm{e}^N = \mathrm{e}^D + \mathrm{e}^D \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$ et cette deuxième matrice $N'$ commute avec $\mathrm{e}^D$ et est nilpotente, car une somme de matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente, et le produit d'une matrice nilpotente par une matrice qui commute avec elle est nilpotent.

(b) Sens direct immédiat et déjà utilisé dans le précédent. Réciproquement, si $p$ est l'indice de nilpotence de $N$, vérifier que $(N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre si $p > 1$. En déduire que $N' = 0 \Rightarrow N = 0$.

(c) Avec ce qui précède, $A$ est diagonalisable, puis par un calcul direct, ses valeurs propres sont des $2i\lambda_k\pi$ avec les $\lambda_k \in \mathbb{Z}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.47.** (a) Supposons $\sum \|u_n\|$ convergente. Soit $\varepsilon > 0$ : pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p \leqslant q$, on a

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=p}^{q} \|u_n\| \leqslant \sum_{n=p}^{q} \|u_n\| \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} \|u_n\|$$

et ce dernier terme étant le reste d'une série convergente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\geqslant n_0 \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} \|u_n\| \leqslant \varepsilon$ et donc $q \geqslant p \geqslant n_0$ implique $\left\| \sum_{n=p}^{q} u_n \right\| \leqslant \varepsilon$. La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est de Cauchy, donc convergente par complétude de $E$, ce qu'on voulait.

(b) Supposons $u$ de Cauchy et ayant une valeur d'adhérence. Soit $\varphi$ une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$ pour $p \geqslant q \geqslant n_0$ et $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour tout $p \geqslant n_0$, compte tenu de $\varphi(p) \geqslant p$, il vient

$$\|u_p - \ell\| \leqslant \|u_p - u_{\varphi(p)}\| + \|u_{\varphi(p)} - \ell\| \leqslant 2\varepsilon$$

pour tout $p \geqslant n_0$ et $u$ converge donc vers $\ell$.

(c) Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_p - u_q\| \leqslant 1$ pour tout $q \geqslant p \geqslant \varphi(0)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons construits $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $q \geqslant p \geqslant \varphi(k)$

$$\|u_p - u_q\| \leqslant 2^{-k}.$$

Il existe alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que pour tout $q \geqslant p \geqslant \varphi(n+1)$

$$\|u_p - u_q\| \leqslant 2^{-n-1}$$

ce qui clôt la récurrence. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite répond à la question.

(d) Supposons que toute série de $E$ absolument convergente soit convergente, et soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. On construit $v$ comme ci-dessus : $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente, donc convergente, donc $v$ converge, donc $u$ a une valeur d'adhérence puis est convergente par le point (b).

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**Ensembles dénombrables, cardinaux**

**E-10.48.** C'est une partie infinie de $\mathbb{Q}$, et $(n, p) \mapsto \dfrac{n}{10^p}$ est une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sur $D$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.49.** $\mathbb{Q}_n[X_1, \ldots, X_p]$ est dénombrable car en bijection avec $\mathbb{Q}^{(n+1)p}$, puis $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$ l'est par réunion des précédentes, et $(P, Q) \mapsto \dfrac{P}{Q}$ est une surjection de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p] \times (\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p] \setminus \{0\})$ sur $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_p)$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.50.** Soit $f$ une telle application. Comme $I \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable, $f(I \cap \mathbb{Q})$ aussi, et comme $f(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \subset \mathbb{Q}$, $f(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ est également dénombrable. Finalement, $f(I)$ est dénombrable. Comme $f$ est continue, $f(I)$ est donc un intervalle dénombrable, donc un singleton, et $f$ est constante, nécessairement de valeur rationnelle. La réciproque est évidente.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.51.** Pour $y \in f(A)$, il existe $x_y \in A$ tel que $f(x_y) = y$ et $I_y \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert à extrémités rationnelles tel que $x_y \in I_y$ et $f(t) \leqslant y$ pour tout $t \in I_y$. Si $(y, z) \in f(A)^2$ sont distincts, par exemple $y < z$, alors $I_y$ ne contient pas $x_z$ de sorte que $I_y \neq I_z$. L'application qui associe à $x$ les extrémités de $I_x$ est donc injective de $f(A)$ dans $\mathbb{Q}^2$. Ce dernier étant dénombrable, $f(A)$ aussi.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.52.** L'injection $x \mapsto \{x\}$ montre l'inégalité large.

S'il existait une bijection $f$ de $E$ sur $\mathscr{P}(E)$, alors $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$ aurait un antécédent $y = f^{-1}(A)$ qui vérifierait $y \in A \iff y \notin A$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.53.** (a) $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents (par exemple, $\dfrac{1+\text{th}}{2}$ réalise une bijection). On associe à $x \in ]0,1[$ son développement binaire, et à un tel développement la partie $A$ de $\mathbb{N}$ obtenue en lisant une fonction caractéristique dans ses bits : $n \in A$ ssi le $n$-ème bit de $x$ est égale à 1.

Inversement, à une partie $A$ de $\mathbb{N}$, on associe l'élément $x$ de $]0,1[$ obtenu par le procédé inverse si $A$ n'est pas de complémentaire fini (le développement ne se conclut pas par une infinité de 1) et $1+x$ sinon : c'est une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $]0,2[$ qui est équipotent à $]0,1[$ par $x \mapsto 2x$.

(b) Non : pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ dont $A$ est exactement l'ensemble des points fixes, ce qui définit une surjection de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.54.** (a) L'inclusion $E \cup h(E) \subset E$ est triviale puisque $h$ est à valeurs dans $E$, si bien que $E \in \mathcal{V}$.

Comme $R \cup h(M) \subset M$ pour tout $M \in \mathcal{V}$, on a en particulier $R \subset M$ et donc $R \subset \bigcap_{M \in \mathcal{V}} M = V$. De plus

$$h(V) = h\left(\bigcap_{M \in \mathcal{V}} M\right) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{V}} h(M)$$

et comme $h(M) \subset M$ pour tout $M \in V$, il vient bien

$$h(V) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{V}} M = V.$$

Finalement, $R \cup h(V) \subset V$ de sorte que $V \in \mathcal{V}$. *Démontrez par vous-mêmes, si nécessaire, que l'image directe d'une intersection est toujours incluse dans l'intersection des images directes, que la réciproque est fausse en général, et vraie pour une injection.*

(b) On doit montrer que $M \in \mathcal{V} \Rightarrow R \cup h(R \cup h(M)) \subset R \cup h(M)$. On sait en outre que $h(R \cup h(M)) = h(R) \cup h(h(M))$.

∗ L'inclusion $R \subset R \cup h(M)$ est triviale.

∗ Pour tout $M \in \mathcal{V}$, on a $h(M) \subset M$ et donc $h(h(M)) \subset h(M) \subset R \cup h(M)$.

∗ Comme $M \in \mathcal{V}$, $R \subset R \cup h(M) \subset M$ et donc $h(R) \subset h(M) \subset R \cup h(M)$.

On a bien prouvé que $R \cup h(M) \in \mathcal{V}$ pour tout $M \in \mathcal{V}$. *On pourra de même démontrer que l'image directe d'une réunion est égale à la réunion des images directes.*

(c) On sait déjà que $R \cup h(V) \subset V$. De plus, comme $V \in \mathcal{V}$, on a avec la question précédente que $R \cup h(V) \in \mathcal{V}$, si bien que $V \subset R \cup h(V)$ par définition-même de $V$. On a donc bien $R \cup h(V) = V$.

Soit $x \in g^{-1}(E \setminus V)$. Cela signifie que $g(x) \notin V$. Si l'on avait $x \in f(V)$, on aurait $g(x) \in g(f(V)) = h(V) \subset V$, ce qui est donc exclu, de sorte que $x \in F \setminus f(V)$. On a donc prouvé

$$g^{-1}(E \setminus V) \subset F \setminus f(V).$$

Si $x \in F \setminus f(V)$, alors par injectivité de $g$, $g(x) \notin g(f(V)) = h(V)$. Comme en outre $g(x) \notin R$ par défintion de $R$, on a $g(x) \notin (R \cup h(V)) = V$, et donc $x \in g^{-1}(E \setminus V)$. Ceci achève bien de prouver que

$$g^{-1}(E \setminus V) = F \setminus f(V).$$

(d) $\tilde{f}$ est injective en tant que restriction de $f$ et surjective par définition-même, son ensemble d'arrivée étant égal à son image. C'est donc une bijection de $V$ sur $f(V)$.

De même, $\tilde{g}$ est injective, et la question précédente montre que son image est bien incluse dans $E \setminus V$. De plus, pour tout $y \in E \setminus V$, on a en particulier $y \notin R$ et donc $y \in g(F)$. $y$ possède un unique antécédant $x$ par $g$ et comme $y \in E \setminus V$, $x \in g^{-1}(E \setminus V)$ et donc $\tilde{g}$ est surjective, et donc finalement bijective de $g^{-1}(E \setminus V)$ sur $E \setminus V$.

On définit alors $\varphi : E \to F$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) \text{ si } x \in V \\ \tilde{g}^{-1}(x) \text{ si } x \in E \setminus V \end{cases}.$$

Si $(x, y) \in E^2$ vérifient $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors

∗ soit $(x, y) \in V^2$, auquel cas $\varphi(x) = \tilde{f}(x) = \varphi(y) = \tilde{f}(y)$ et $x = y$ par injectivité de $\tilde{f}$ ;

∗ soit $(x, y) \in (E \setminus V)^2$, auquel cas $\varphi(x) = \tilde{g}^{-1}(x) = \varphi(y) = \tilde{g}^{-1}(y)$ et $x = y$ par injectivité de $\tilde{g}$ ;

∗ soit l'un (par exemple $x$) est dans $V$ et l'autre (par exemple $y$) est dans $E \setminus V$, d'où $\varphi(x) \in f(V)$, $\varphi(y) \in g^{-1}(E \setminus V) = F \setminus f(V)$, ce qui est absurde puisque $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Finalement, $\varphi$ est injective.

Enfin comme $g^{-1}(E \setminus V) = F \setminus f(V)$ et que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}^{-1}$ sont respectivement surjectives sur $f(V)$ et sur $F \setminus f(V)$, on a $\operatorname{Im}\varphi \supset \operatorname{Im}\tilde{f} \cup \operatorname{Im}\tilde{g}^{-1} = F$ et $\varphi$ est surjective.

$\varphi$ est donc une bijection de $E$ sur $F$, comme souhaité.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**Familles sommables, produits de Cauchy**

**E-10.55.** La convergence absolue de $\sum a^n$ est assurée et on obtient par produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)^2 = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^{n+1} = a\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

On obtient la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$ en effectuant de même le produit de Cauchy de $\sum na^n$ par $\sum a^n$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.56.** Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=0}^{10^N-1} x^{p_n} = x + \sum_{n=1}^{10^N-1} x^{p_n} = x + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} x^k = x + \sum_{k=1}^{N-1} (10^{k+1} - 10^k) x^k = x + 9 \sum_{k=1}^{N-1} (10x)^k.$$

Cette dernière série est convergente si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{10}$, et sa somme, dans ce cas, est $x + \dfrac{9x}{1+10x}$.

* Si $|x| \geqslant \dfrac{1}{10}$, la suite $\left( \displaystyle\sum_{n=0}^{10^N-1} x^{p_n} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est divergente, et donc $\sum x^{p_n}$, dont elle est extraite, également.
* Si $|x| < \dfrac{1}{10}$, le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer la sommabilité de la famille $(x^{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ puisque la série des paquets $\displaystyle\sum \sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} |x|^k$ est convergente. On en déduit que $\sum x^{p_n}$ est convergente et que sa somme est $x + \dfrac{9x}{1+10x}$.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.57.** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $z_p$ le nombre d'entiers entre $[\![10^p, 10^{p+1} - 1]\!]$ ne contenant pas le chiffre 9 dans leur écriture décimale : on construit un tel nombre en choisissant son premier chiffre entre 1 et 8, puis ses $p-1$ autres chiffres entre 0 et 8, ce qui donne

$$z_p = 8.9^{p-1}$$

et donc

$$\sum_{k=10^p}^{10^{p+1}-1} u_k \leqslant \sum_{k=10^p}^{10^{p+1}-1} \frac{1}{10^p} = \frac{8.9^{p-1}}{10^p} = \frac{8}{9} \left( \frac{9}{10} \right)^p.$$

En notant $I_p = [\![10^p, 10^{p+1} - 1]\!]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, les paquets $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partitionnent $\mathbb{N}$ de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable d'après le théorème de sommation par paquets puisqu'elle est positive et que $\displaystyle\sum_p \left( \sum_{n \in I_p} u_n \right)$ converge. $\sum u_n$ est donc convergente.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.58.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{2}$$

par étude de $x \mapsto x(n-x)$ sur $[0, n]$, de sorte que

$$|w_n| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{\sqrt{2}(n-1)}{n}$$

et donc $w_n$ ne tend pas vers 0 et $\sum w_n$ diverge grossièrement.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.59.** Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_N = \{(n,p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leqslant n < \varphi(N), \psi(N-1) \leqslant p < \psi(N)\} \cup \{(n,p) \in \mathbb{N}^2, \varphi(N-1) \leqslant n < \varphi(N), 0 \leqslant p < \psi(N-1)\}$$

avec les conventions $\varphi(-1) = \psi(-1) = 0$. On a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} \left( \sum_{(n,p) \in I_N} u_{n,p} \right) = \sum_{n=0}^{\varphi(N)} \sum_{p=0}^{\psi(N)} u_{n,p}$$

qui converge donc vers $\displaystyle\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} u_{n,p}$ par le théorème de sommation par paquets.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.60.** Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $v_{p,q} = 2^{-pq}$. On montre que $(v_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, qui est positive, est sommable par le théorème de sommation par paquets (en considérant les paquets « $q$ constant », ou directement avec le théorème de Fubini) puisque pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

$$S_q = \sum_{p=1}^{+\infty} v_{p,q} = \frac{2^{-q}}{1 - 2^{-q}}$$

existe en tant que somme d'une série géométrique, et de plus

$$S_q \underset{q \to +\infty}{\sim} 2^{-q}$$

si bien que $\sum S_q$ est convergente. Soit alors $A = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1\}$ : on a $(v_{p,q})_{(p,q)\in A}$ sommable en tant que sous-famille, et de façon évidente, $A$ est en bijection avec $\mathbb{Q}_+^*$ et pour tout $(p,q) \in A$, $v_{p,q} = u_{\frac{p}{q}}$. On en déduit que $(u_r)_{r\in\mathbb{Q}_+^*}$ est également sommable.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.61.** Notons que tous les termes sont positifs. Si cette famille est sommable, on doit en particulier avoir la convergence de $\displaystyle\sum_p \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, puis celle de $\displaystyle\sum_q \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)$. Comme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \geqslant \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \geqslant \frac{q}{(2q^2)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha q^{2\alpha-1}}$$

on doit avoir la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{2^\alpha q^{2\alpha-1}}$ et donc $\alpha > 1$. Si $\alpha > 1$, on a $p^2+q^2 \geqslant 2pq$ pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, d'où

$$u_{p,q} \leqslant \frac{1}{2^\alpha p^\alpha q^\alpha}$$

et la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(pq)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable comme produit de familles sommables. Finalement, $\displaystyle\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.62.** Pour tout $x \in ]-1,1[$, on a l'équivalent

$$\left|\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui montre la convergence de la série. De plus

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{(2p+1)2^n}$$

est aussi absolument convergente, si bien que $(x^{(2p+1)2^n})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe un unique $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$k = (2p+1)2^n$$

de sorte que $(n,p) \mapsto (2p+1)2^n$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$. Il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} x^{(2p+1)2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

comme voulu.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.63.** Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on constate que

$$u_{p,q} = \frac{p!}{p+1}\left[\frac{q!}{(p+q+1)!} - \frac{(q+1)!}{(p+q+2)!}\right]$$

d'où par télescopage la convergence et la valeur de

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{(p+1)^2}$$

puis $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.64.** (a) $r_n$ existe d'après le théorème des séries alternées (application immédiate), et ce même théorème donne la majoration de la valeur absolue du reste d'une série alternée par la valeur absolue de son premier terme, ici $|r_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $r_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ceci assure la convergence absolue de $\sum r_n$ puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} r_n = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + (N+1)r_{N+1}.$$

$\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (classiquement vers $-\ln 2$) par application directe du critère des séries alternées, et $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)r_{N+1}=0$ avec la question précédente, d'où finalement
$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = -\ln 2.$$

(b) La sommabilité de $\mathscr{F}=\left(u_{n,k}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ équivaut à celle de $\left(|u_{n,k}|\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. La convergence de $\sum \frac{1}{k^2}$ est assurée, et en posant $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que la sommabilité de $\mathscr{F}$ équivaut à la convergence de $\sum R_n$. Or, une comparaison série-intégrale banale montre que $R_n\sim\frac{1}{n}$ : la famille $\mathscr{F}$ n'est pas sommable.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.65.** On pose
$$H_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$
pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. On a pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $N>p$
$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{N}\frac{1}{n-p}=-\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N-p}\frac{1}{n}=-H_{p-1}+H_{N-p}$$
et
$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{N}\frac{1}{n+p}=H_{N+p}-H_p-\frac{1}{2p}$$
si bien que
$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{N}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{N}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{H_{N-p}-H_{p-1}-H_{N+p}+H_p}{2p}+\frac{1}{2p^2}.$$
Or on sait (voir TD, à savoir redémontrer) que quand $N$ tend vers l'infini
$$H_N=\ln(N)+\gamma+o(1)$$
avec $\gamma\in\mathbb{R}$, si bien que
$$H_{N-p}-H_{N+p}=\ln(N-p)-\ln(N+p)+o(1)=\ln\left(\frac{N-p}{N+p}\right)+o(1)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
et donc
$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{p^2}.$$
On en déduit que
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}=\frac{\pi^2}{6}.$$
Comme $u_{p,n}=-u_{n,p}$ pour tout $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on a en échangeant les rôles $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}=-\frac{\pi^2}{6}$ comme voulu.

**Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé**

**E-10.66.** On a
$$W_n=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}u_kv_{p-k}=\sum_{k=0}^{n}u_k\sum_{p=k}^{n}v_{p-k}=\sum_{k=0}^{n}u_k\sum_{p=0}^{n-k}v_p=\sum_{k=0}^{n}u_k(V-R_{n-k})=U_nV-\sum_{k=0}^{n}u_{n-k}R_k.$$
Le reste $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 : cette suite est donc bornée, d'une part, et d'autre part pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant n_0\Rightarrow |R_n|\leqslant\varepsilon$ d'où pour $n\geqslant n_0$
$$\left|\sum_{k=0}^{n}u_{n-k}R_k\right|\leqslant\|R\|_\infty\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_{n-k}|+\varepsilon\sum_{k=n_0}^{n}|u_{n-k}|=\|R\|_\infty\sum_{k=n-n_0+1}^{n}|u_k|+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-n_0}|u_k|\leqslant\|R\|_\infty(\tilde U_n-\tilde U_{n-n_0})+\varepsilon\tilde U.$$
où $\tilde U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}|u_k|$ et $\tilde U$ est sa limite ($\sum u_n$ est absolument convergente). Comme $U_n-\tilde U_{n-n_0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il existe $n_1\geqslant n_0$ tel que
$$n\geqslant n_1\Rightarrow\left|\sum_{k=0}^{n}u_{n-k}R_k\right|\leqslant\varepsilon(\|R\|_\infty+\tilde U)$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n - U_n V = 0$, ce qui donne le résultat voulu.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.67.** Commençons par le calcul, sous réserve de justifier la sommabilité par la suite. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, on a

$$\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{z^{p+q}-1} = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{z^{p+q}} \frac{1}{1-\frac{1}{z^{p+q}}} = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^{kp+kq}} = \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{z^{i+j}} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

en notant que pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, il existe un unique $(k,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $k = i \wedge j$, $p \wedge q = 1$ et $i = kp$, $j = kq$.

Or, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p \wedge q = 1$, on a

$$\left|\frac{1}{z^{p+q}-1}\right| = \frac{1}{|z^{p+q}-1|} \leqslant \frac{1}{|z|^{p+q}-1}$$

et le calcul ci-dessus montre, d'après le théorème de sommation par paquets, la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{|z|^{p+q}-1}\right)_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}$. On en déduit la sommabilité de la famille initiale et donc la validité du calcul précédent, ce qui conclut.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.68.** D'après la théorie générale de la décomposition en éléments simples, il existe $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(X+k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k}.$$

En multipliant cette égalité par $X+\ell$ pour $\ell \in [\![0,n]\!]$ fixé et en évaluant en $X = -\ell$, il vient

$$a_\ell = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0\\ k\neq\ell}}^{n}(k-\ell)} = \frac{(-1)^\ell}{\ell!(n-\ell)!}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$, on introduit donc la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_{k,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } k > n \\ \dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)} \text{ si } k \leqslant n. \end{cases}$$

On étudie la sommabilité de cette famille par les paquets $I_k = \{u_{k,n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ (« paquets $k$ constant »), autrement dit par le théorème de Fubini en sommant d'abord sur $n$. On a pour tout $N \geqslant k$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} |u_{k,n}| = \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k!(n-k)!|z+k|} = \frac{1}{k!|z+k|}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{k!|z+k|}\sum_{n=0}^{N-k}\frac{1}{n!}.$$

La convergence de la série exponentielle $\sum \dfrac{1}{n!}$ étant assurée, on obtient par passage à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{k,n}| = \frac{1}{k!|z+k|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \frac{\mathrm{e}}{k!|z+k|}.$$

Comme en outre

$$\frac{\mathrm{e}}{k!|z+k|} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{k!|k-|z||} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k!}\right)$$

on a la convergence de $\sum \sum_{n\in I_k} |u_{n,k}|$ et donc la sommabilité de $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$. On procède à la sommation selon les mêmes paquets, et il vient par un calcul analogue à celui ci-dessus

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n\in I_k} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(z+k)}$$

ce qui justifie au passage l'existence du terme de droite de l'énoncé. En sommant cette fois selon les paquets $J_n = \{u_{k,n}, k \in \mathbb{N}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit en permutant les sommes sur $k$ et sur $n$, on obtient

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} u_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(z+k)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(z+k)}$$

ce qui montre à la fois l'existence du terme de gauche et l'égalité requise par l'énoncé.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.69.** (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{\pi} e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi} e^{i(k+1)\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{k+1}-1}{i(k+1)} = i\frac{1+(-1)^k}{k+1}$$

et

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_{-1}^{1} P(t) dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k t^k\right) dt = -i \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k e^{ik\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

Il vient en l'appliquant à $P^2$

$$\int_0^1 P^2(t) dt \leqslant \int_{-1}^{1} P^2(t) dt = \left|\int_{-1}^{1} P^2(t) dt\right| = \left|\int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

par parité puisque $P(e^{i\theta})$ et $P(e^{-i\theta})$ sont conjugués donc de même module pour tout $\theta \in [0, \pi]$.

(b) On applique ce qui précède à $P = \sum_{k=0}^{n} |a_k| X^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_0^1 P^2(t) dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\theta}\right|^2 d\theta.$$

Or, on a d'une part

$$\int_0^1 P^2(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| t^k\right)^2 dt = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} |a_k||a_\ell| \int_0^1 t^{k+\ell} dt = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{|a_k a_\ell|}{k+\ell+1}$$

et d'autre part pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\theta}\right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\theta}\right)\overline{\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\theta}\right)} = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{-ik\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} |a_k||a_\ell| e^{i(k-\ell)\theta}$$

et pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$ vérifiant $k \neq \ell$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = 0$$

si bien que

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{|a_k a_\ell|}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant \pi \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$$

ce qu'on voulait, en revenant à la définition de la sommabilité, puis en faisant tendre $n$ vers l'infini.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**

**E-10.70.** $a$ est convergente donc bornée : en notant $A = \|a\|_\infty$, on a donc $N(x) = 0$ pour tout $x > A$. Notons aussi que $N$ est décroissante, et diverge vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 0. Enfin, pour tout $c \in ]0, A]$, le nombre de valeurs de la suite $a$ comprises dans le segment $[c, A]$ est fini (puisqu'à partir d'un certain rang, $a_n < c$). Comme $N$ ne prend que des valeurs entières, elle est en escalier sur $[c, A]$. Par définition, elle est donc continue par morceaux sur $]0, A]$, et son intégrale a donc un sens dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On définit encore $I(x) = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant x\}$ pour tout $x > 0$.

Si $A = 0$, alors $a = 0$ et tout est clair. Si $A > 0$, il existe un rang $n_0$ à partir duquel $a_n < \frac{A}{2}$, et donc $A = \sup\{a_n, n \in [\![0, n_0]\!]\}$, et comme cet ensemble est fini, il s'agit en fait d'un maximum. On construit alors la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $A_0 = A$, $A_1 = \max\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus I(A_0)\}$, et d'une façon générale $A_k = \max\{a_n, n \in \mathbb{N} \setminus I(A_{k-1})\}$, ce qui revient à réordonner les termes de la suite $a$ en décroissant et en éliminant les éventuels doublons. On a notamment $\lim_{k\to+\infty} A_k = 0$. On pose enfin $J_0 = I(A_0)$, $J_k = I(A_k) \setminus I(A_{k-1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On a alors $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui forme une partition de $\mathbb{N}$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a d'une part $\mathrm{Card}(J_k)=N(A_{k+1})-N(A_k)$, et $a_n=A_k$ si et seulement $n\in J_k$. D'après le théorème de sommation par paquets, la série $\sum a_n$ est alors convergente, ce qui revient à la sommabilité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si et seulement si pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\in J_k} a_n$ est finie, et $\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{n\in J_k} a_n\right)$ converge. Or, $\sum\limits_{n\in J_0} a_n=N(A_0)A_0$ et $\sum\limits_{n\in J_k} a_n=(N(A_k)-N(A_{k-1}))A_k$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, si bien que pour tout $K\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K}\left(\sum_{n\in J_k} a_n\right)&=N(A_0)A_0+\sum_{k=1}^{K}(N(A_k)-N(A_{k-1}))A_k\\&=N(A_0)A_0+\sum_{k=1}^{K}N(A_k)A_k-\sum_{k=1}^{K}N(A_{k-1})A_k\\&=N(A_0)A_0+\sum_{k=1}^{K}N(A_k)A_k-\sum_{k=0}^{K-1}N(A_k)A_{k+1}\\&=N(A_0)A_0-N(A_0)A_1+N(A_K)A_K+\sum_{k=1}^{K-1}N(A_k)(A_k-A_{k+1})\\&=N(A_K)A_K+\sum_{k=0}^{K-1}N(A_k)(A_k-A_{k+1}).\end{aligned}$$

Comme $N$ est en escalier sur $]0,A_0]$ et que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constitue une « subdivision infinie décroissante » adaptée, on reconnaît

$$\sum_{k=0}^{K-1}N(A_k)(A_k-A_{k+1})=\int_{A_K}^{A_0}N(x)\mathrm{d}x.$$

∗ Si $\sum a_n$ converge, la série de gauche converge. Comme $N(A_K)A_K\geqslant 0$, il vient

$$\int_{A_K}^{A_0}N(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=0}^{K}\left(\sum_{n\in J_k}a_n\right)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in J_k}a_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

puis pour tout $x>0$, en notant $K_x=\min\{K\in\mathbb{N}, A_K\leqslant x\}$, on a

$$\int_{x}^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{A_{K_x}}^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

de sorte que $\int_0^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x$ converge d'après le théorème fondamental pour la convergence des intégrales généralisées de fonctions positives, et $\int_0^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$.

∗ Si $\int_0^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x$ converge, alors pour tout $x>0$, par décroissance de $N$

$$xN(x)\leqslant 2\int_{\frac{x}{2}}^{x}N(t)\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

de sorte que $\lim\limits_{K\to+\infty}N(A_K)A_K=0$ par conposition de limites. On en déduit la convergence de $\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{n\in J_k}a_n\right)$ et donc de $\sum a_n$, et de plus $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\leqslant\int_0^{+\infty}N(x)\mathrm{d}x$, ce qui conclut.

**Énoncé non détaillé** – **Énoncé détaillé**