Cálculo del logaritmo de un número a cuatro decimales sin necesidad de tablas (logaritmos decimales)

Hay más de un método para resolver este problema, pero ahora exponemos el siguiente, por su relativa facilidad.

«*Si en un número que su primera cifra significativa empiece por 4 se sustituye éste por 6, resultará que las tres primeras cifras del número obtenido forman la mantisa del número dado, con un error máximo de unas tres unidades.*

Si el número fuera 43528, la mantisa sería 635, por este procedimiento, siendo la verdadera 638, y si el número dado fuera 480, las dos mantisas coinciden en 680

Si tomamos a partir de 4000 los números de 50 en 50 unidades y calculamos sus mantisas, por el método indicado, existiendo además las verdaderas mantisas y los errores correspondientes, formaremos la siguiente tabla, que además nos servirá para la construcción de la correspondiente *curva de error*, que figura a continuación de la tabla.

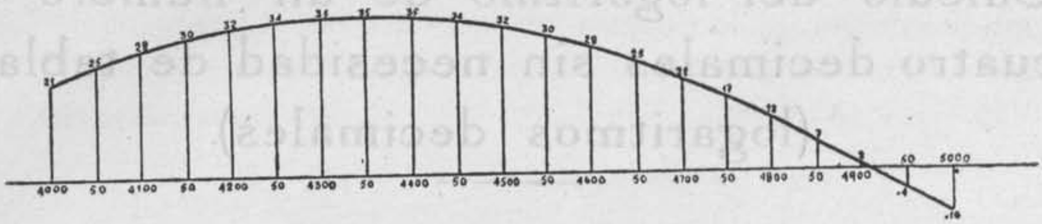
Tabla de mantisas de números que empiecen por 4

Número	Mantisa verdadera	Mantisa calculada	Error	Número	Mantisa verdadera	Mantisa calculada	Error
4000	6021	6000	—21	4550	6580	6550	—30
4050	6075	6050	—25	4600	6628	6600	—28
4100	6128	6100	—28	4650	6675	6650	—25
4150	6180	6150	—30	4700	6721	6700	—21
4200	6232	6200	—32	4750	6767	6750	—17
4250	6284	6250	—34	4800	6812	6800	—12
4300	6335	6300	—35	4850	6857	6850	— 7
4350	6385	6350	—35	4900	6902	6900	— 2
4400	6435	6400	—35	4950	6946	6950	+ 4
4450	6484	6450	—34	5000	6990	7000	+10
4500	6532	6500	—32	—	—	—	—

Como se vé, el error máximo de las mantisas a tres decimales es de 3 $^{1}/_{2}$ unidades, sin necesidad de la curva de error, que tiene por fin obtener las mantisas verdaderas a cuatro decimales.

BRAC, 73 (1955) 307-312

Curva de error para obtener las mantisas a cuatro decimales



Construcción de la curva anterior

Sobre el eje de las abcisas, tomaremos los números a la escala de cinco unidades por milímetro, y las ordenadas a la de una unidad por milímetro, donde, para más comodidad se han tomado los errores negativos en la forma indicada.

Como se ve, hay simetría, en la parte comprendida entre 4000, y 4700, estando el eje de simetría en el número 4350, pero esta simetría, no se verifica, hacia la izquierda, aunque el error no es grande en los números que se acercan al 4000 por defecto.

Uso de la curva de error. (Problema Directo)

Supongamos que se desea calcular el logaritmo de 4650. La mantisa prescindiendo del error es 6650, y como la ordenada es 25, tendremos como mantisa a cuatro decimales el número 6675 con error menor que la unidad. Si el número está comprendido entre dos de la curva, la mantisa se calcula casi a simple vista, con nn pequeño error, que podrá llegar a unas dos unidades del cuarto orden decimal y si los números estan comprendidos entre 4250 y 4450 el mayor error es la unidad.

Si el número es 4817, y teniendo en cuenta que 12 y 7 son los errores de 4800 y 4850 por una parte y que 17 es la tercera parte (aproximada de 4850—4800), el error aproximado será $12-\frac{12-7}{3}=12-2$ (aprx.)$=10$, es decir que la mantisa será $6817+10=6827$, que es tambien la verdadera.

Hay que tener en cuenta que todos los números que consideremos han de estar logarítmicamente considerados entre 4000 y 5000 cosa que siempre se puede conseguir por la inalterabilidad de las mantisas, al multiplicar cualquier numero, por la unidad seguida de ceros.

BRAC, 73 (1955) 307-312

Si hubiera más de cuatro cifras en el número dado se prescinde desde la quinta en adelante, aumentando una unidad a la última cifra conservada, si la primera que se desprecia es cinco o mayor que cinco, siendo de este modo bastante aproximada la compensación de los errores que se cometan

Caso en que el número no empiece por 4

Cuando la primera cifra que tenga el número dado, sea distinta de 4, basta multiplicar o dividir convenientemente por un número digito, cuyas mantisas deben de conocerse previamente y aplicar la ley del logaritmo de un producto o de un cociente.

Cálculo del logaritmo decimal de un número a cuatro decimales, sin necesidad de tablas

(CONCLUSIÓN)

Problema inverso.-Dado un logaritmo, buscar el antilogaritmo, o sea el número que le corresponde

Prescindiendo, desde luego, de la característica, y considerando únicamente las mantisas que empiecen por 6, y solo con cuatro cifras, como en el problema directo, formaremos la siguiente tabla, análoga a la del problema directo. escribiendo las mantisas de 50 en 50 unidades; después los antilogaritmos verdaderos, a continuación los calculados, deducidos de las mantisas, sustituyendo el 6 por 4 y por último los errores correspondientes.

Tabla de antilogaritmos de mantisas que empiecen por 6

Mantisa	Antilogaritmo verdadero	Antilogaritmo calculado	Error	Mantisa	Antilogaritmo verdadero	Antilogaritmo calculado	Error
6000	3981	4000	+19	6550	4519	4550	+31
6050	4027	4050	23	6600	4571	4600	29
6100	4074	4100	26	6650	4624	4650	26
6150	4121	4150	29	6700	4677	4700	28
6200	4169	4200	31	6750	4732	4750	18
6250	4217	4250	33	6800	4786	4800	14
6300	4266	4300	34	6850	4842	4850	8
6350	4315	4350	35	6900	4898	4900	2
6400	4365	4400	35	6950	4955	4950	— 5
6450	4416	4450	34	7000	5012	5000	—12
6500	4467	4500	33	—	—	—	—

Comparando esta tabla con la del problema directo, se observa que los errores son aproximadamente iguales y de signo contrario, y si construyéramos la curva de error, tomando los errores negativos y positivos en su verdadero sentido, obtendríamos una curva análoga a la ya construida.

Como los errores son sensiblemente iguales (prescindiendo del sentido), tomando términos medios entre ellos, formaríamos la tabla única para los dos casos, que tomando números y mantisas de 100 en 100, a partir respectivamente de 4000 y 6000, los errores serían los números 20—27—32—35—35—32—28—23—13—2 y 11).

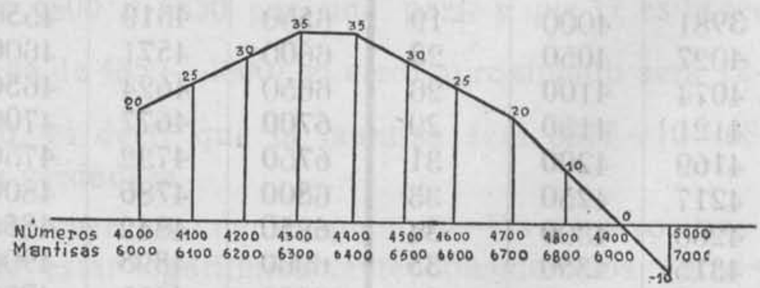
Estos números a la vez, pueden sustituirse, por otros múltiplos de 5, que aproximándose mucho a ellos, tienen la ventaja de poderse retener facilmente en la memoria, que es el fin que perseguimos

De este modo, se forma la tabla siguiente, que es la que sirve de fundamento, para formar la gráfica práctica de error, que sirve para ambos casos.

Tabla para la formación de la gráfica práctica de error

Número	Mantisa	Error	Número proporcional	Número	Mantisa	Error	Número proporcional
4000	6000	20	4	4600	6600	25	5
4100	6100	25	5	4700	6700	20	4
4200	6200	30	6	4800	6800	10	2
4300	6300	35	7	4900	6900	0	0
4400	6400	35	7	5000	7000	10	2
4500	6500	30	6	—	—	—	—

Línea práctica de error



Como se vé, la *línea práctica de error* o *gráfica práctica de error*, queda reducida a una línea poligonal muy fácil de construir y que a la vez sirve para la reducción tanto del problema directo, como del inverso.

Cuando lo que se busca es una mantisa hay que sumar el error, si la ordenada correspondiente está sobre la línea de abcisas, y al contrario, si está debajo de dicha línea.

En cuanto a los números o mantisas que no sean múltiplos de 100, fácilmente se hace la interpolación a simple vista, cometiéndose un error practicameute despreciable.

Supongamos que se pretende obtener el logaritmo del número 4367, o mejor dicho, la mantisa de su logaritmo, como ya se ha indicado en la primera parte de este trabajo.

La regla para este caso y para todos es el siguiente: Se sustituye el 4 por el 6, y al número resultante se le suma la ordenada de la izquierda, más una mitad por cada 20 de diferencia entre los comprendidos entre 4000 y 4300, ninguna unidad entre los comprendidos entre 4300 y 4400 y rebajando una unidad por cada 20 entre 4400 y 4700, así como dos unidades entre 4700 y 4900. Por último entre 4900 y 5000, no hay que añadir ordenada ninguna, puesto que la de 4900 es nula.

Para más claridad, un ejemplo de cada uno de los cinco casos que pueden presentarse, indicando en cada uno la mantisa verdadera a cuatro decimales, bien por defecto o por exceso con arreglo a las tablas de logaritmos de más de cuatros decimales, apreciándose de este modo, el error relativamente pequeño que se comete utilizando la *línea práctica de error.*

Primer caso.—Mantisa de 4243.

Como 43 es aproximadamente el duplo de 20, tendremos que la mantisa será $6243+30+2=6275$.

La mantisa verdadera es 6277 (exceso) es decir que el error cometido es menor que dos unidades.

Segundo caso.—Mantisa de 4388.

Mantisa$=6388+35=5423$.

La mantisa verdadera es 6423 (exceso) que como se vé es igual a la calculada.

Tercer caso.—Mantisa de 4638.

Como 38 se acerca mucho a 40, es decir, a 20×2, tendremos que Mantisa$=6638+25-2-6661$.

La mantisa verdadera es 6663 (def), que como se vé, el error es de unas dos unidades.

Cuarto caso.—Mantisa de 4767.

Se tiene que 67 aproximadamente es 10×7, y por tanto resultará que Mantisa=6767+20−7=6780.

La verdadera mantisa es 6782 (def.) cuyo error es también de unas dos unidades.

Quinto caso.—Mantisa de 4957.

Tendremos que Mantisa=6957−6=6951, puesto que en este caso no hay ordenada a sumar, y por otra parte, como 57 es aproximadamente 60, el error a restar es 6.

La mantisa verdadera es 6952 (def), siendo de una unidad el error en este caso.

En cuanto al problema contrario, o sea el de buscar el antilogaritmo conocida la mantisa, no nos detenemos a resolverlo, por que basta proceder en sentido contrario al problema directo, es decir, disminuir dos unidades a la primera cifra de la mantisa que siempre ha de ser el 6; disminuir además el valor de la ordenada de la izquierda, y por último sumar el error aproximadamente calculado. En efecto: según el problema directo se tiene: Mantisa=(Antilogaritmo+2000)+Ordenada−Error o bien M=A+2000+O−E que nos dará: A=(M−2000)−O+E.

Aplicándola a un ejemplo cualquiera tendremos: Antilogaritmo de 6784.

Tendremos: Antilogaritmo=4784−20+8=4772.

El verdadero valor es 4769 que como se vé, el error es de unas tres unidades.

No hay que dudar de que utilizando la curva de error, en lugar de la línea quebrada, se reducirían más los pequeños errores cometidos, pero la diferencia de errores sería muy pequeña y el trazado de la gráfica bastante más penoso que el de la línea quebrada.

En cuanto a números que no empiecen por 4, o de mantisas que no empiecen por 6, es muy fácil conseguir pasar a estos casos, teniendo en cuenta lo dicho en los casos de no empezar los números por 4, o las mantisas por 6 (análogo al caso anterior).

Las mantisas a tener en cuenta son las de los números 2 a 9, que son: 3010—4771—6021—6990—7782—8451—9031 y 9542.

Dionisio Ortiz Rivas.

Octubre 19 de 1955.

BRAC, 73 (1955) 307-312