

隔離と市中の感染者を分ける SIR モデル

29, April, 2020

1 SIQR model

Chowell (2007)(1). Maier (2020)(2) や小田垣孝氏の論考 (3)) では、発見され隔離された感染者と市中の感染者を分けて記述するモデルが提案されている。小田垣孝氏の論考 (3)) では、PCR 検査の徹底により、市中感染者を発見し隔離することにより、接触率削減と同等の効果が得られることが指摘されている。また、市中感染者数の推定も行われている。

ここでは、これらのモデルをさらに簡略化したモデル方程式 (仮に SIQR モデルと呼ぶ) の解を求め、その振る舞いを実際のデータと比較することで、(あとで述べる拙稿 (S-2) において) 日本や東京における観測値からパラメータの推定を試みる。(なお、同様のモデルは最近 Maier 等によっても提案されており、そこでは感染者の発見、隔離と外出制限により、未感染者数が実質的に減少する効果も考慮されている (2)。) (なお、この論考は研究が目的ではないので、新規性は第一義的に重要な問題ではない。のちにさらに文献が見つかった時点で、順次文献として追加してゆくことにする。)

未感染者数 (susceptible) を $S(t)$ 、市中感染者数 (Infected) を $I(t)$ 、発見され隔離または入院した感染者数 (Quarantined) を $Q(t)$ 、回復した人 (Recovered、死者を含む) の数を $R(t)$ とすると、以下の方程式を得る。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \kappa I - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa I - \gamma' Q \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \gamma' Q \quad (4)$$

$$D = \nu(t)R \quad (5)$$

ここで、 γ は市中感染者の回復率 (回復までの日数の逆数)、 κ は市中感染者が発見される率、 γ' は隔離 (または入院) 者の回復率を表す。なお、死者数 D は、回復した人数に対して $\nu(t)$ の比率で生じるものと仮定する。全体の人口を N とすると、 $N = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ で表すことができ、 N は一定である。なお、累積感染者数は、 $I(t) + Q(t) + R(t)$ で表わされる。初期の頃は $R(t)$ が十分小さいため、 $I(t) + Q(t)$ と考えてよい。また、観測されている感染者数は、 $Q(t)$ であることに注意が必要である。さらに、真の新規感染者数 (1日あたり) は、 dI/dt で与えられる (2) 式の第 1 項、 βSI であるが、これが実際に観測されるわけではなく、観測されるのは dQ/dt で与えられる (3) 式の右辺第一項の $\kappa I(t)$ であり、市中感染者の κ 倍の割合で新規感

染者が発見されるのである。今、感染初期であり、 $I, Q, R \ll N$ が成り立つとすると $S = N$ と置いて (2) 式は次のように書ける。

$$\frac{dI}{dt} = (\beta N - \kappa - \gamma)I = \lambda I \quad (6)$$

ただし、 $\lambda = \beta N - \kappa - \gamma$ である。

時刻 $t = 0$ での市中感染者数を $I(0)$ とすると (6) 式の解は、

$$I(t) = I(0)e^{\lambda t} \quad (7)$$

で与えられる。ここで、基本再生産数 R_0 、実効再生産数 R をそれぞれ、

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}, \quad R = \frac{\beta N}{\kappa + \gamma} \quad (8)$$

とおくと、増加率 λ は次のように表される。

$$\lambda = \gamma(R_0 - 1) - \kappa = (\gamma + \kappa)(R - 1) \quad (9)$$

したがって、 $\lambda > 0 (R > 1)$ ならば、指数関数的な増加（感染爆発）、 $\lambda < 0 (R < 1)$ ならば指数関数的な減衰（終息に向かう）ことになる。SIR モデルの場合の基本再生産数 $R_0 = \beta N / \gamma$ と比較して、隔離政策により、 $\gamma / (\gamma + \kappa)$ だけ基本再生産数が小さくなっていることが分かる。

隔離（または入院）した感染者数 $Q(t)$ についても解いておくと、(3) 式の一階線形微分方程式の解は

$$Q(t) = Q(0)e^{-\gamma' t} + \frac{\kappa I(0)}{\lambda + \kappa} (e^{\lambda t} - e^{-\gamma' t}) \quad (10)$$

で与えられる。

また、接触抑制の効果は、接触削減率を r とおいて、基本再生産数 R_0 が rR_0 に変化するものとする、増加率は以下で与えられる。

$$\lambda = \gamma(r R_0 - 1) - \kappa \quad (11)$$

参考文献

- [1] G. Chowell, H. Nishiura and L. M. A. Bettencourt, J. R. Soc. Interface 4, 155–166 (2007).
- [2] B. F. Maier, Science 10.1126/science.abb4557 (2020).
- [3] 小田垣 孝、私信 (arXiv)
- [4] 牧野淳一郎、「科学」、5月号 (2,020、岩波書店)

佐野 雅己 (Masaki Sano)