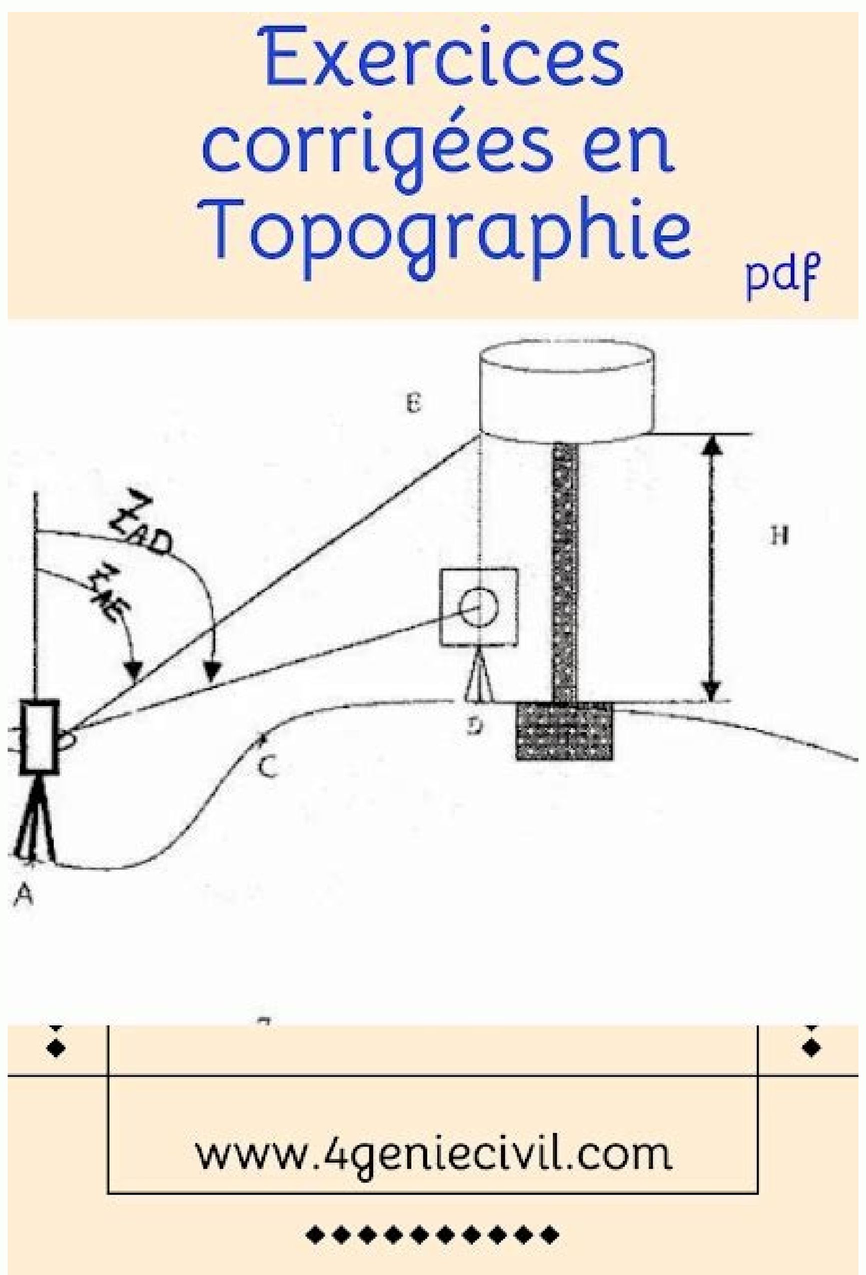
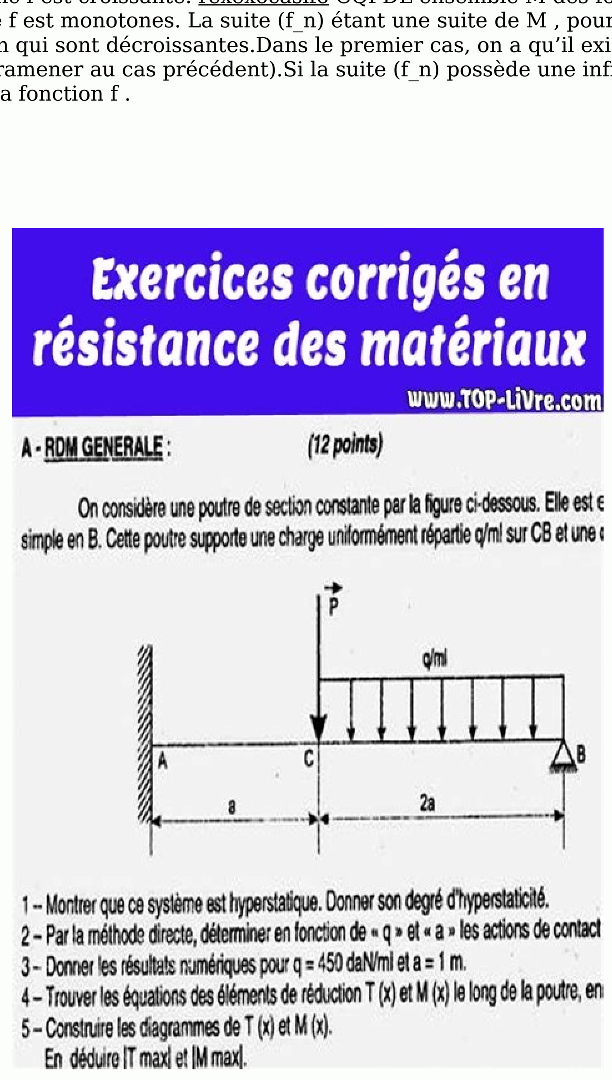
Exercice corrige topographie pdf

Ces exercices corrigés de topologies ont pour objectifs de déterminer si certains sous-ensembles de fonctions continues sont ouverts ou fermés. Ces exercices sont abordables en MP, MPI, PC et PSI. On pourra retrouver d'autres exercices corrigés de topologie sur notre site et des exercices non-corrigés ici.Dans la suite, on considère E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1] munit de la norme \| f \|_\infty = \mathrm{sup}_{t \in [0,1]} |f(t)| .L'ensemble A des fonctions de E valant 0 en 0 est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble E n'est pas ouvert. Soit \varepsilon > 0 et on considère la fonctionf_\varepsilon : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right)On a bien f_\varepsilon qui est continue comme somme de fonctions continues. yadanohi De plus, on a f_\varepsilon(0) = \varepsilon eq 0 et donc f_\varepsilon otin A . Or, on a par construction que\| f_\varepsilon - f \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilonAinsi, pour tout élément f \in A et pour tout \varepsilon > 0 , on a construit un élément f_\varepsilon \in A^c \cap \mathcal{B}(f, \varepsilon) . Ainsi, l'ensemble A n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble A est fermé. On va pour cela utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (qui est la méthode la plus simple en général pour montrer qu'un ensemble est fermé). Soit en effet (f_n) une suite de fonctions de A qui converge vers f \in E pour la norme \| \cdot \|_\infty et montrons que f \in A .La convergence pour la norme \| \cdot \|_\infty correspond à la convergence uniforme et donc la suite (f_n) converge uniformément vers f . Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé.

Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé. CQFDL'ensemble C des fonctions de E qui sont croissantes est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble C n'est pas un ouvert de E . Rappelons qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. On va donc montrer que le le complémentaire de C n'est pas fermé. On cherche donc une suite de fonctions qui ne soient pas dans C mais dont la limite est dans C.Pour cela, on considère pour n \in \mathbb{N} la suite de fonctions définie sur [0,1] parf_n : t \longmapsto \frac{ \left(t- \frac{1}{2} \right)^2}{n+1}Pour tout n \in \mathbb{N} , les fonctions f_n sont bien des éléments du complémentaire de C (les fonctions sont toutes décroissantes sur \left[0, \frac{1}{2} \right] et croissantes sur \left[\frac{1}{2}, 1 \right]). On a de plus\forall t \in [0,1], | f_n(t) | \leq \frac{1}{n+1}Et donc \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} , ce qui nous permet de dire que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, qui est croissante. Ainsi, l'ensemble C^c n'est pas fermé et donc C n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble C est fermé de E . On va encore une fois utiliser la caractérisation séquentielle des fermé. Soit en effet (f_n) une suite de fonctions croissantes qui convergent vers f \in E . Montrons que f est croissante.Soient donc x, y \in [0,1] tels que x < y . Du fait que (f_n) converge uniformément vers f , on a que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout n \in \mathbb{N} , f_n \in C , on obtient alorsf(y) - f(x) = \lim_{n \rightarrow + \infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0et ainsi on a f(y) \geq f(x) et donc f est croissante. CQFDL'ensemble M des fonctions monotones de E est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Le même contre-exemple que celui de l'exercice 2 nous permet de montrer que M n'est pas un ouvert de E . Montrons que M est un fermé de E .On considère donc une suite (f_n) de M qui converge vers f \in E . Montrons que f est monotones. La suite (f_n) étant une suite de M , pour tout n \in \mathbb{N} on a que la fonction f_n est croissante ou décroissante. Ainsi, ou bien il y a un nombre fini de fonction f_n qui sont décroissante, ou bien un nombre fini qui sont croissantes, ou bien il y a un nombre infini de fonctions f_n qui sont croissantes et un nombre infinis de f_n qui sont décroissantes.Dans le premier cas, on a qu'il existe un entier n_0 \in \mathbb{N} tel que pour tout n \geq n_0 , on ait que la fonction f_n est croissante. suxoye On conclu alors de manière similaire à l'exercice 2 que la fonction f est croissante. Le cas d'un nombre fini de fonctions croissantes est similaire (il suffit de considérer la suite (-f_n) et de se ramener au cas précédent).Si la suite (f_n) possède une infinité de fonctions croissantes et décroissantes, il existe alors une sous-suite (f_{\varphi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions croissantes et une sous-suite (f_{\psi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions décroissantes. Or, chacune de ces deux sous-suites convergent uniformément vers la fonction f . Ainsi, on a d'une part que la limite f est croissante et d'autre part qu'elle est décroissante. Ainsi, f est constante, et donc entre-autre elle est monotone.
D'où le résultat annoncé dans les trois cas. CQFDL'ensemble D des fonctions dérivables sur [0,1] est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble D n'est pas un ouvert de E . Pour se faire, montrons D^c n'est pas fermé. Pour tout n \in \mathbb{N} , on considère la fonctionf_n : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \frac{ \left| t - \frac{1}{2} \right|}{n+1} \end{array} \right)Pour tout n \in \mathbb{N} , la fonction f_n est continue sur [0,1] mais n'est pas dérivable en \frac{1}{2} et on a \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} . Ainsi, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle qui est bien dérivable sur [0,1] . L'ensemble D n'est donc pas ouvert dans E .L'ensemble D n'est pas fermé dans E . Pour le voir, on considère pour tout n \in \mathbb{N} , la fonctionf_n : \left(\begin{array}{c c c} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac {1}{n}} \end{array} \right)La suite (f_n) est bien dans D .
Montrons qu'elle converge vers la fonction f : t \mapsto \left| t - \frac{1}{2} \right| otin D .
Il est clair que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout t \in [0,1] , on a que\begin{align*} |f(t) - f_n(t)| &= \left| \sqrt{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2} - \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{n}} \right| \\ &= \left| t - \frac{1}{2} \right| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{align*}On obtient donc que \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} et donc on a bien que la suite (f_n) , qui est une suite de D , converge uniformément vers la fonction f otin . On a bien le résultat annoncé précédemment.



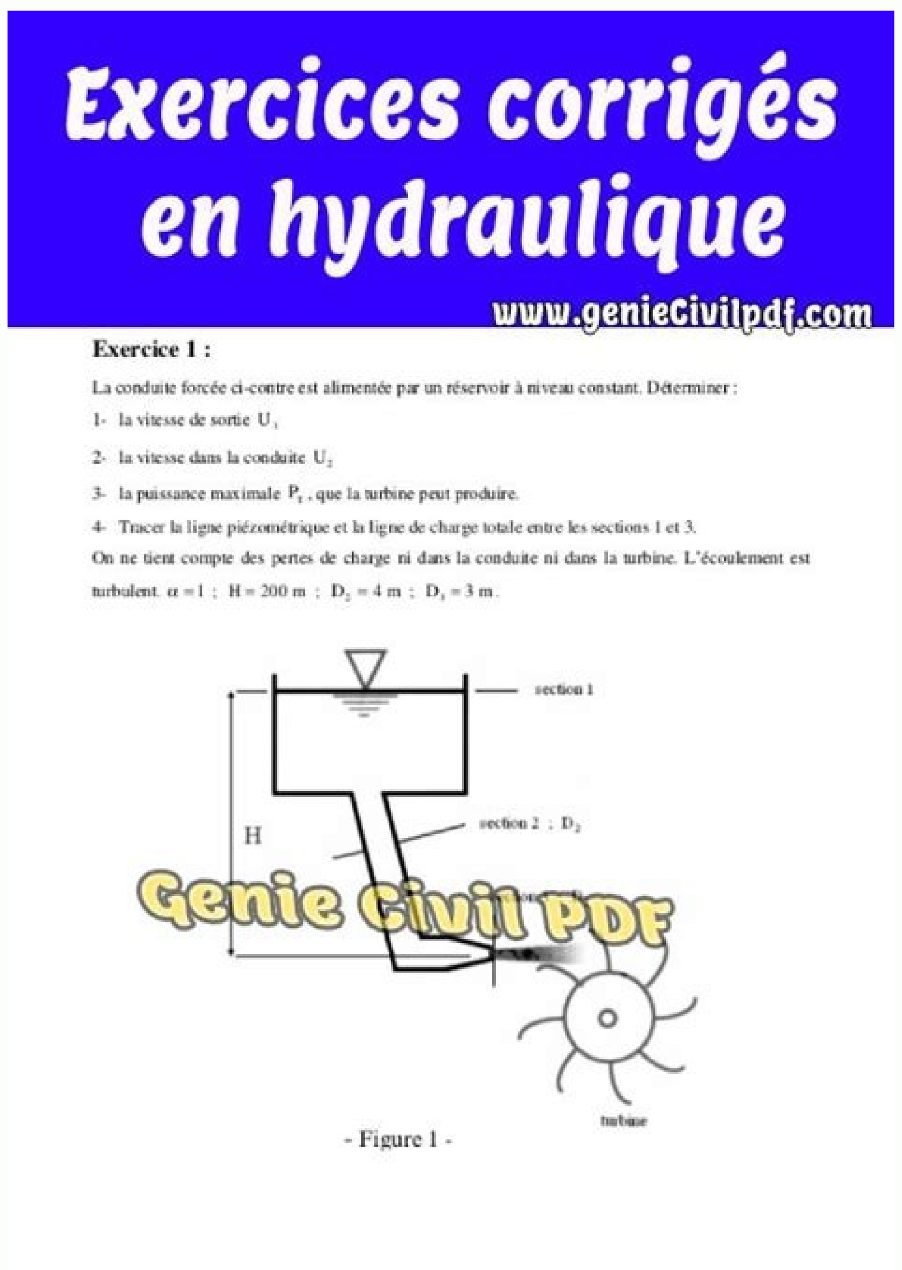
Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé. CQFDL'ensemble C des fonctions de E qui sont croissantes est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble C n'est pas un ouvert de E . Rappelons qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. On va donc montrer que le le complémentaire de C n'est pas fermé. On cherche donc une suite de fonctions qui ne soient pas dans C mais dont la limite est dans C.Pour cela, on considère pour n \in \mathbb{N} la suite de fonctions définie sur [0,1] parf_n : t \longmapsto \frac{ \left(t- \frac{1}{2} \right)^2}{n+1}Pour tout n \in \mathbb{N} , les fonctions f_n sont bien des éléments du complémentaire de C (les fonctions sont toutes décroissantes sur \left[0, \frac{1}{2} \right] et croissantes sur \left[\frac{1}{2}, 1 \right]). On a de plus\forall t \in [0,1], | f_n(t) | \leq \frac{1}{n+1}Et donc \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} , ce qui nous permet de dire que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, qui est croissante. Ainsi, l'ensemble C^c n'est pas fermé et donc C n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble C est fermé de E . On va encore une fois utiliser la caractérisation séquentielle des fermé. Soit en effet (f_n) une suite de fonctions croissantes qui convergent vers f \in E . Montrons que f est croissante.Soient donc x, y \in [0,1] tels que x < y . Du fait que (f_n) converge uniformément vers f , on a que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout n \in \mathbb{N} , f_n \in C , on obtient alorsf(y) - f(x) = \lim_{n \rightarrow + \infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0et ainsi on a f(y) \geq f(x) et donc f est croissante. rexexocasifo CQFDL'ensemble M des fonctions monotones de E est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Le même contre-exemple que celui de l'exercice 2 nous permet de montrer que M n'est pas un ouvert de E . Montrons que M est un fermé de E .On considère donc une suite (f_n) de M qui converge vers f \in E . Montrons que f est monotones. La suite (f_n) étant une suite de M , pour tout n \in \mathbb{N} on a que la fonction f_n est croissante ou décroissante. Ainsi, ou bien il y a un nombre fini de fonction f_n qui sont décroissante, ou bien un nombre fini qui sont croissantes, ou bien il y a un nombre infini de fonctions f_n qui sont croissantes et un nombre infinis de f_n qui sont décroissantes.Dans le premier cas, on a qu'il existe un entier n_0 \in \mathbb{N} tel que pour tout n \geq n_0 , on ait que la fonction f_n est croissante. On conclu alors de manière similaire à l'exercice 2 que la fonction f est croissante. Le cas d'un nombre fini de fonctions croissantes est similaire (il suffit de considérer la suite (-f_n) et de se ramener au cas précédent).Si la suite (f_n) possède une infinité de fonctions croissantes et décroissantes, il existe alors une sous-suite (f_{\varphi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions croissantes et une sous-suite (f_{\psi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions décroissantes. Or, chacune de ces deux sous-suites convergent uniformément vers la fonction f .



Ainsi, l'ensemble A n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble A est fermé. On va pour cela utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (qui est la méthode la plus simple en général pour montrer qu'un ensemble est fermé). Soit en effet (f_n) une suite de fonctions de A qui converge vers f \in E pour la norme \| \cdot \|_\infty et montrons que f \in A .La convergence pour la norme \| \cdot \|_\infty correspond à la convergence uniforme et donc la suite (f_n) converge uniformément vers f . Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé. CQFDL'ensemble C des fonctions de E qui sont croissantes est-il un ouvert de E ? tetetatehe Est-il un fermé de E ?L'ensemble C n'est pas un ouvert de E . Rappelons qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. On va donc montrer que le le complémentaire de C n'est pas fermé. On cherche donc une suite de fonctions qui ne soient pas dans C mais dont la limite est dans C.Pour cela, on considère pour n \in \mathbb{N} la suite de fonctions définie sur [0,1] parf_n : t \longmapsto \frac{ \left(t- \frac{1}{2} \right)^2}{n+1}Pour tout n \in \mathbb{N} , les fonctions f_n sont bien des éléments du complémentaire de C (les fonctions sont toutes décroissantes sur \left[0, \frac{1}{2} \right] et croissantes sur \left[\frac{1}{2}, 1 \right]). On a de plus\forall t \in [0,1], | f_n(t) | \leq \frac{1}{n+1}Et donc \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} , ce qui nous permet de dire que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, qui est croissante. Ainsi, l'ensemble C^c n'est pas fermé et donc C n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble C est fermé de E . On va encore une fois utiliser la caractérisation séquentielle des fermé. Soit en effet (f_n) une suite de fonctions croissantes qui convergent vers f \in E . yajeho Montrons que f est croissante.Soient donc x, y \in [0,1] tels que x < y . Du fait que (f_n) converge uniformément vers f , on a que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout n \in \mathbb{N} , f_n \in C , on obtient alorsf(y) - f(x) = \lim_{n \rightarrow + \infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0et ainsi on a f(y) \geq f(x) et donc f est croissante. CQFDL'ensemble M des fonctions monotones de E est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Le même contre-exemple que celui de l'exercice 2 nous permet de montrer que M n'est pas un ouvert de E . Montrons que M est un fermé de E .On considère donc une suite (f_n) de M qui converge vers f \in E . Montrons que f est monotones. La suite (f_n) étant une suite de M , pour tout n \in \mathbb{N} on a que la fonction f_n est croissante ou décroissante. Ainsi, ou bien il y a un nombre fini de fonction f_n qui sont décroissante, ou bien un nombre fini qui sont croissantes, ou bien il y a un nombre infini de fonctions f_n qui sont croissantes et un nombre infinis de f_n qui sont décroissantes.Dans le premier cas, on a qu'il existe un entier n_0 \in \mathbb{N} tel que pour tout n \geq n_0 , on ait que la fonction f_n est croissante. On conclu alors de manière similaire à l'exercice 2 que la fonction f est croissante. Le cas d'un nombre fini de fonctions croissantes est similaire (il suffit de considérer la suite (-f_n) et de se ramener au cas précédent).Si la suite (f_n) possède une infinité de fonctions croissantes et décroissantes, il existe alors une sous-suite (f_{\varphi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions croissantes et une sous-suite (f_{\psi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions décroissantes. Or, chacune de ces deux sous-suites convergent uniformément vers la fonction f . Ainsi, on a d'une part que la limite f est croissante et d'autre part qu'elle est décroissante. Ainsi, f est constante, et donc entre-autre elle est monotone. D'où le résultat annoncé dans les trois cas.

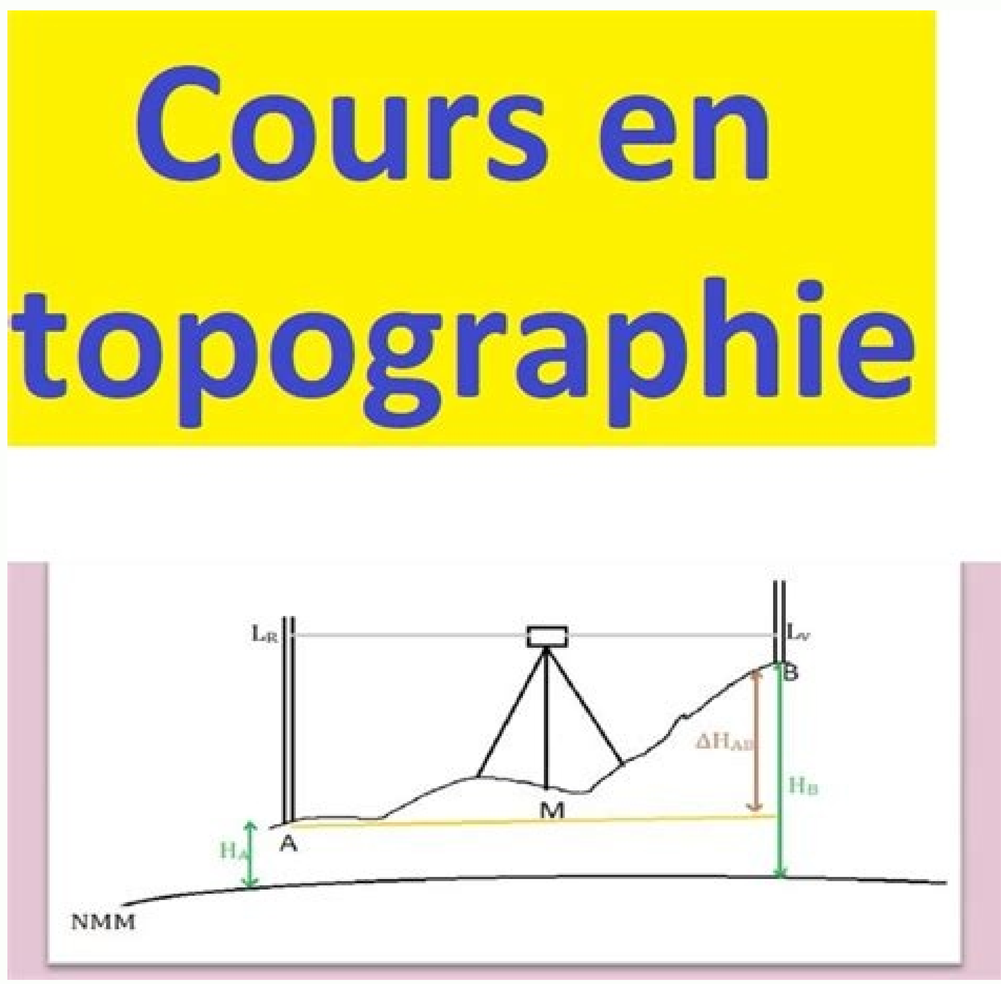
CQFDL'ensemble D des fonctions dérivables sur [0,1] est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble D n'est pas un ouvert de E . Pour se faire, montrons D^c n'est pas fermé. Pour tout n \in \mathbb{N} , on considère la fonctionf_n : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \frac{ \left| t - \frac{1}{2} \right|}{n+1} \end{array} \right)Pour tout n \in \mathbb{N} , la fonction f_n est continue sur [0,1] mais n'est pas dérivable en \frac{1}{2} et on a \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} . Ainsi, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle qui est bien dérivable sur [0,1] . L'ensemble D n'est donc pas ouvert dans E .L'ensemble D n'est pas fermé dans E . Pour le voir, on considère pour tout n \in \mathbb{N} , la fonctionf_n : \left(\begin{array}{c c c} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac {1}{n}} \end{array} \right)La suite (f_n) est bien dans D . Montrons qu'elle converge vers la fonction f : t \mapsto \left| t - \frac{1}{2} \right| otin D . Il est clair que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout t \in [0,1] , on a que\begin{align*} |f(t) - f_n(t)| &= \left| \sqrt{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2} - \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{n}} \right| \\ &= \left| t - \frac{1}{2} \right| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{align*}On obtient donc que \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} et donc on a bien que la suite (f_n) , qui est une suite de D , converge uniformément vers la fonction f otin . On a bien le résultat annoncé précédemment. CQFDL'ensemble R des fonctions polynomiales de [0,1] dans \mathbb{R} est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble R n'est pas ouvert dans E . En effet, soit \varepsilon > 0 . On sait d'une part que la fonction nulle est polynomiale.

D'autre part, on consière la fonction f_\varepsilon définit sur \left[0, \varepsilon \right] par f_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2} - t et nulle sur [\varepsilon, 1] . Alors f_\varepsilon est continue, n'est pas polynomiale (celle-ci s'annule une infinité de fois) et on a\forall \varepsilon > 0, f_\varepsilon \in \mathcal{B}\left(0, \varepsilon \right) \cap R^cL'ensemble R n'est donc pas un ouvert de E .L'ensemble R n'est pas fermé dans E . En effet, considérons la suite (f_n) définie parf_n : t \longmapsto \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}On sait que la suite (f_n) converge simplement vers t \mapsto e^t . L'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet de conclure quant au fait que (f_n) converge bien uniformément vers t \mapsto e^t . Une autre manière de le voir est de remarquer que pour tout t \in [0,1] on a| f_n(t) - e^t| = \sum_{k=n+1}^{+ \infty} \frac{t^n}{k!} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{+ \infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{n+1}Il suffit donc de montrer que la fonction exponentielle n'est pas polynomiale. Par l'absurde, si elle l'était, du fait que sa limite en - \infty est 0, celle-ci serait la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, l'ensemble R n'est pas fermé dans E . CQFDL'ensemble N des fonctions de E non-nulle en 0 est-il un ouvert de E ?



Soit \varepsilon > 0 et on considère la fonctionf_\varepsilon : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right)On a bien f_\varepsilon qui est continue comme somme de fonctions continues. De plus, on a f_\varepsilon(0) = \varepsilon eq 0 et donc f_\varepsilon otin A . Or, on a par construction que\| f_\varepsilon - f \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilonAinsi, pour tout élément f \in A et pour tout \varepsilon > 0 , on a construit un élément f_\varepsilon \in A^c \cap \mathcal{B}(f, \varepsilon) . Ainsi, l'ensemble A n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble A est fermé. On va pour cela utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (qui est la méthode la plus simple en général pour montrer qu'un ensemble est fermé). Soit en effet (f_n) une suite de fonctions de A qui converge vers f \in E pour la norme \| \cdot \|_\infty et montrons que f \in A .La convergence pour la norme \| \cdot \|_\infty correspond à la convergence uniforme et donc la suite (f_n) converge uniformément vers f . Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé. CQFDL'ensemble C des fonctions de E qui sont croissantes est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble C n'est pas un ouvert de E . Rappelons qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. On va donc montrer que le le complémentaire de C n'est pas fermé. On cherche donc une suite de fonctions qui ne soient pas dans C mais dont la limite est dans C.Pour cela, on considère pour n \in \mathbb{N} la suite de fonctions définie sur [0,1] parf_n : t \longmapsto \frac{ \left(t- \frac{1}{2} \right)^2}{n+1}Pour tout n \in \mathbb{N} , les fonctions f_n sont bien des éléments du complémentaire de C (les fonctions sont toutes décroissantes sur \left[0, \frac{1}{2} \right] et croissantes sur \left[\frac{1}{2}, 1 \right]). On a de plus\forall t \in [0,1], | f_n(t) | \leq \frac{1}{n+1}Et donc \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} , ce qui nous permet de dire que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, qui est croissante. Ainsi, l'ensemble C^c n'est pas fermé et donc C n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble C est fermé de E . On va encore une fois utiliser la caractérisation séquentielle des fermé. Soit en effet (f_n) une suite de fonctions croissantes qui convergent vers f \in E . Montrons que f est croissante.Soient donc x, y \in [0,1] tels que x < y .

Du fait que (f_n) converge uniformément vers f , on a que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout n \in \mathbb{N} , f_n \in C , on obtient alorsf(y) - f(x) = \lim_{n \rightarrow + \infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0et ainsi on a f(y) \geq f(x) et donc f est croissante. CQFDL'ensemble M des fonctions monotones de E est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Le même contre-exemple que celui de l'exercice 2 nous permet de montrer que M n'est pas un ouvert de E .



Soit \varepsilon > 0 et on considère la fonctionf_\varepsilon : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right)On a bien f_\varepsilon qui est continue comme somme de fonctions continues. De plus, on a f_\varepsilon(0) = \varepsilon eq 0 et donc f_\varepsilon otin A . Or, on a par construction que\| f_\varepsilon - f \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilonAinsi, pour tout élément f \in A et pour tout \varepsilon > 0 , on a construit un élément f_\varepsilon \in A^c \cap \mathcal{B}(f, \varepsilon) . Ainsi, l'ensemble A n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble A est fermé. On va pour cela utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (qui est la méthode la plus simple en général pour montrer qu'un ensemble est fermé). Soit en effet (f_n) une suite de fonctions de A qui converge vers f \in E pour la norme \| \cdot \|_\infty et montrons que f \in A .La convergence pour la norme \| \cdot \|_\infty correspond à la convergence uniforme et donc la suite (f_n) converge uniformément vers f . Or, la convergence uniforme implique la convergence simple (c'est-à-dire la convergence ponctuelle), on a doncf(0) = \lim_{n \rightarrow + \infty} f_n(0) = 0et on obtient ainsi que f(0) = 0 et on obtient le résultat annoncé. CQFDL'ensemble C des fonctions de E qui sont croissantes est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble C n'est pas un ouvert de E . Rappelons qu'un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. On va donc montrer que le le complémentaire de C n'est pas fermé. On cherche donc une suite de fonctions qui ne soient pas dans C mais dont la limite est dans C.Pour cela, on considère pour n \in \mathbb{N} la suite de fonctions définie sur [0,1] parf_n : t \longmapsto \frac{ \left(t- \frac{1}{2} \right)^2}{n+1}Pour tout n \in \mathbb{N} , les fonctions f_n sont bien des éléments du complémentaire de C (les fonctions sont toutes décroissantes sur \left[0, \frac{1}{2} \right] et croissantes sur \left[\frac{1}{2}, 1 \right]). On a de plus\forall t \in [0,1], | f_n(t) | \leq \frac{1}{n+1}Et donc \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} , ce qui nous permet de dire que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle, qui est croissante.

Ainsi, l'ensemble C^c n'est pas fermé et donc C n'est pas ouvert.Montrons que l'ensemble C est fermé de E .

On va encore une fois utiliser la caractérisation séquentielle des fermé. Soit en effet (f_n) une suite de fonctions croissantes qui convergent vers f \in E . Montrons que f est croissante.Soient donc x, y \in [0,1] tels que x < y . Du fait que (f_n) converge uniformément vers f , on a que (f_n) converge simplement vers f .

De plus, pour tout n \in \mathbb{N} , f_n \in C , on obtient alorsf(y) - f(x) = \lim_{n \rightarrow + \infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0et ainsi on a f(y) \geq f(x) et donc f est croissante. CQFDL'ensemble M des fonctions monotones de E est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Le même contre-exemple que celui de l'exercice 2 nous permet de montrer que M n'est pas un ouvert de E . Montrons que M est un fermé de E .On considère donc une suite (f_n) de M qui converge vers f \in E .

Montrons que f est monotones. La suite (f_n) étant une suite de M , pour tout n \in \mathbb{N} on a que la fonction f_n est croissante ou décroissante. Ainsi, ou bien il y a un nombre fini de fonction f_n qui sont décroissante, ou bien un nombre fini qui sont croissantes, ou bien il y a un nombre infini de fonctions f_n qui sont croissantes et un nombre infinis de f_n qui sont décroissantes.Dans le premier cas, on a qu'il existe un entier n_0 \in \mathbb{N} tel que pour tout n \geq n_0 , on ait que la fonction f_n est croissante. On conclu alors de manière similaire à l'exercice 2 que la fonction f est croissante. Le cas d'un nombre fini de fonctions croissantes est similaire (il suffit de considérer la suite (-f_n) et de se ramener au cas précédent).Si la suite (f_n) possède une infinité de fonctions croissantes et décroissantes, il existe alors une sous-suite (f_{\varphi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions croissantes et une sous-suite (f_{\psi(n)}) de (f_n) constituée de fonctions décroissantes. Or, chacune de ces deux sous-suites convergent uniformément vers la fonction f .

Ainsi, on a d'une part que la limite f est croissante et d'autre part qu'elle est décroissante. Ainsi, f est constante, et donc entre-autre elle est monotone. D'où le résultat annoncé dans les trois cas. CQFDL'ensemble D des fonctions dérivables sur [0,1] est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble D n'est pas un ouvert de E . Pour se faire, montrons D^c n'est pas fermé. Pour tout n \in \mathbb{N} , on considère la fonctionf_n : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \frac{ \left| t - \frac{1}{2} \right|}{n+1} \end{array} \right)Pour tout n \in \mathbb{N} , la fonction f_n est continue sur [0,1] mais n'est pas dérivable en \frac{1}{2} et on a \| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{n+1} . Ainsi, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle qui est bien dérivable sur [0,1] . L'ensemble D n'est donc pas ouvert dans E .L'ensemble D n'est pas fermé dans E . Pour le voir, on considère pour tout n \in \mathbb{N} , la fonctionf_n : \left(\begin{array}{c c c} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac {1}{n}} \end{array} \right)La suite (f_n) est bien dans D . Montrons qu'elle converge vers la fonction f : t \mapsto \left| t - \frac{1}{2} \right| otin D . Il est clair que (f_n) converge simplement vers f . De plus, pour tout t \in [0,1] , on a que\begin{align*} |f(t) - f_n(t)| &= \left| \sqrt{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2} - \sqrt{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{n}} \right| \\ &= \left| t - \frac{1}{2} \right| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{align*}On obtient donc que \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} et donc on a bien que la suite (f_n) , qui est une suite de D , converge uniformément vers la fonction f otin . On a bien le résultat annoncé précédemment. CQFDL'ensemble R des fonctions polynomiales de [0,1] dans \mathbb{R} est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?L'ensemble R n'est pas ouvert dans E . En effet, soit \varepsilon > 0 . On sait d'une part que la fonction nulle est polynomiale. D'autre part, on consière la fonction f_\varepsilon définit sur \left[0, \varepsilon \right] par f_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2} - t et nulle sur [\varepsilon, 1] . Alors f_\varepsilon est continue, n'est pas polynomiale (celle-ci s'annule une infinité de fois) et on a\forall \varepsilon > 0, f_\varepsilon \in \mathcal{B}\left(0, \varepsilon \right) \cap R^cL'ensemble R n'est donc pas un ouvert de E .L'ensemble R n'est pas fermé dans E . En effet, considérons la suite (f_n) définie parf_n : t \longmapsto \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}On sait que la suite (f_n) converge simplement vers t \mapsto e^t . L'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet de conclure quant au fait que (f_n) converge bien uniformément vers t \mapsto e^t . Une autre manière de le voir est de remarquer que pour tout t \in [0,1] on a| f_n(t) - e^t| = \sum_{k=n+1}^{+ \infty} \frac{t^n}{k!} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{+ \infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{n+1}Il suffit donc de montrer que la fonction exponentielle n'est pas polynomiale. Par l'absurde, si elle l'était, du fait que sa limite en - \infty est 0, celle-ci serait la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, l'ensemble R n'est pas fermé dans E . CQFDL'ensemble N des fonctions de E non-nulle en 0 est-il un ouvert de E ? Est-il un fermé de E ?Si l'on a fait l'exercice 1, les deux questions sont très rapides (N est ouvert mais n'est pas fermé). On va quand même le faire en imaginant ne pas avoir fait l'exercice 1.L'ensemble N est ouvert. Soit en effet f \in N et notons a := f(0) eq 0 . Alors pour tout g \in \mathcal{B}\left(f, \frac{a}{2} \right) , on a pour tout t \in [0,1]| f(t) - g(t) | \leq \frac{a}{2} En particulier, en 0, on a que |a - g(0)| \leq \frac{a}{2} et donc g(0) eq 0 et d'où \mathcal{B} \left(f, \frac{a}{2} \right) \subset N , ce qui nous montre que N est ouvert dans E .L'ensemble N n'est pas fermé dans E . Il suffit pour cela de considérer la suite de fonction définie pour tout n \in \mathbb{N} par f_n : t \mapsto \frac{1}{n} . CQFD Télécharger ces exercices corrigées en topographie en format pdf.Mesurer la distance et le dénivelée entre deux points.Calculer la surface d'un polygone à partir des coordonnées Lambert.La topographie est la description détaillée et précise de la forme et de la configuration d'une surface terrestre ou d'un terrain, y compris les caractéristiques naturelles telles que les montagnes, les collines, les vallées, les rivières, les lacs, les plaines, ainsi que les caractéristiques artificielles telles que les routes, les bâtiments, les ponts, les canaux et les infrastructures. Elle implique la mesure et la représentation graphique des caractéristiques du terrain en utilisant des techniques telles que la cartographie, la photogrammétrie, la télédétection, la lidar et la géodésie. La topographie est souvent utilisée dans de nombreux domaines tels que l'urbanisme, l'ingénierie, la géologie, la foresterie, l'agriculture et l'aménagement du territoire.

Nivellement : Mesurer les différences de niveau entre deux points à l'aide d'un niveau optique ou d'un niveau laser. Levé topographique : Effectuer un levé topographique d'un terrain en utilisant des outils tels que des théodolites, des stations totales, des GPS et des logiciels de CAO.Profil en long : Dessiner le profil en long d'une route, d'un canal ou d'une piste de ski à partir des données topographiques.Cartographie : Dessiner une carte topographique à partir d'un levé topographique, en utilisant des symboles conventionnels pour représenter les différentes caractéristiques du terrain.Calcul de volumes : Calculer le volume d'un terrain, d'un lac ou d'une excavation à partir des mesures topographiques.Tracé routier : Concevoir le tracé d'une route en fonction des contraintes topographiques et des exigences de pente, de rayon de courbure et de visibilité.Surveillance de chantier : Surveiller un chantier de construction pour s'assurer que les travaux sont effectués conformément aux plans topographiques et aux spécifications techniques.Étude de drainage : Effectuer une étude de drainage pour déterminer les zones à risque d'inondation et concevoir des solutions de drainage appropriées en fonction de la topographie du terrain.Recherche de propriété : Identifier les limites de propriété à partir des données topographiques et de la documentation cadastrale.Analyse de l'érosion : Évaluer les risques d'érosion et de perte de sol en fonction de la topographie du terrain et de l'utilisation des terres.