Cálculo práctico del logaritmo de un número sin necesidad de las tablas

En las diversas cuestiones numéricas puede presentarse el caso de tener que hacer uso de los logaritmos y carecer de tablas que resuelvan el problema.

El siguiente método que vamos a exponer, resuelve la cuestión de un modo tan aproximado como lo resolvería la regla de cálculo.

A este procedimiento le hemos llamado «Método logarítmico del número 19» por la siguiente razón:

Si del número 19 seguido de uno ó dos ceros restamos un número de dos ó tres cifras respectivamente, que empiece por las cifras 3-4-5 ó 6 y el resultado lo multiplicamos por el mismo número dado, nos dará un producto cuyas tres ó cuatro primeras forman aproximadamente la mantisa de dicho número.

Este principio fundamental, cuya demostración la creemos innecesaria y que conduce a una ecuación de quinto grado, con tres variables, vamos a comprobarlo prácticamente del siguiente modo:

Llamemos N a un número cualquiera comprendido entre 300 y 700; M a la mantisa verdadera de su logaritmo, tomada con cuatro decimales sea por defecto o por exceso; M' a la mantisa calculada por el procedimiento indicado y apreciada hasta el mismo límite que la anterior y E al error cometido o sea a la diferencia de la mantisa verdadera a la mantisa calculada, precediendo a dicho error del signo correspondiente.

Calculemos las mantisas de los números desde 300 a 700 tomándolos de 10 en 10, con lo que formaremos el siguiente cuadro.

BRAC, 13 (1925) 281-289

Número N	Mantisa verdadera M	Mantisa calculada M'	Error E	Número N	Mantisa verdadera M	Mantisa calculada M'	Error E
300	4771	4800	29	510	7076	7089	13
310	4914	4929	15	520	7160	7176	16
320	5051	5056	5	530	7243	7261	18
330	5185	5181	—4	540	7324	7344	20
340	5315	5304	—11	550	7404	7425	21
350	5441	5425	—16	560	7482	7504	22
360	5563	5544	—19	570	7559	7581	22
370	5682	5661	— 21	580	7634	7656	22
380	5798	5776	—22	590	7709	7729	20
390	5911	5889	—22	600	7782	7800	18
400	6021	6000	—21	610	7853	7869	16
410	6128	6109	—19	620	7924	7936	12
420	6232	6216	—16	630	7993	8001	8
430	6335	6321	—14	640	8062	8064	2
440	6435	6424	—11	650	8129	8125	—4
450	6532	6525	—7	660	8195	8184	—11
460	6628	6624	—4	670	8261	8241	—20
470	6721	6721	0	680	8325	8296	—29
480	6812	6816	4	690	8388	8348	—40
490	6902	6909	7	700	8451	8400	—51
500	6990	7000	10				

Considerando los números comprendidos entre 310 y 670 vemos que las mantisas verdaderas y las calculadas se diferencian como máximum en algo más de veinte unidades y si solamente tomamos tres cifras de la mentisa entonces el error es de unas dos unidades aproximadamente también como máximum, pues vemos que log 390=2.591 que es el verdadero, y 2.589 (algo por exceso) el calculado, lo que nos dice que: *pnra calcular la* mantisa del logaritmo de un número comprendido entre 310 y 670 a tres decimales y con un error igual o menor de dos unidades del último orden, basta aplicar la regla del 19 tomando como minuendo 1900.

Ejemplo: calcular el logaritmo de 527.

Cálculo de log 527

```
1900—527
    1373
--------
    1581
   3689
  1581
  527
--------
  723571
```

tomando solo tres cifras sería 724
luego log 527=2.724
el logarítmo verdadero es 2.722

Como el complemento a 1900 puede hacerse de memoria, convendrá hacerlo tomando además el resultado de multiplicando y entonces el cálculo será el siguiente:

Cálculo de log 527 $\left\{\begin{array}{r} 1373\\ 527\\ \hline 9611\\ 2746\\ 6865\\ \hline 723571 \end{array}\right.$

Como la mantisa se obtiene con seis cifras y de ellas solo tres son las que han de utilizarse conviene seguir el siguiente procedimiento: se multiplican las unidades de multiplicador por las centenas del multiplicando, las decenas por las decenas y las unidades por todo el multiplicando y se colocan los productos unos debajo de otros en columna vertical la primera cifra de cada producto y después se suman. (Este procedimiento es análogo al del multiplicador invertido de Onghtred y da el mismo resultado). De este modo el error como máximum llegaría a tres unidades en los casos más desfavorables, pero en otros como sucede en este es ventajoso como vamos a ver.

Cálculo de log 527 $\left\{\begin{array}{r} 1373\\ 527\\ \hline 91\\ 274\\ 6865\\ \hline 7230 \end{array}\right.$

de donde log 527=2.723
el verdadero es como sabemos 2.722

Cuando queremos aproximar la mantisa a cuatro decimales con un error de una o dos unidades a lo sumo, hay que rectificar el error obtenido por el procedimiento indicado del 19.

Para ello construyamos la curva de error correspondiente para deducir la ley de variación de dicho error y poder deducir de la misma la construcción de la curva práctica de error que es la que debe aprenderse a construir a pulso y con muy pocos datos que se retengan en la memoria.

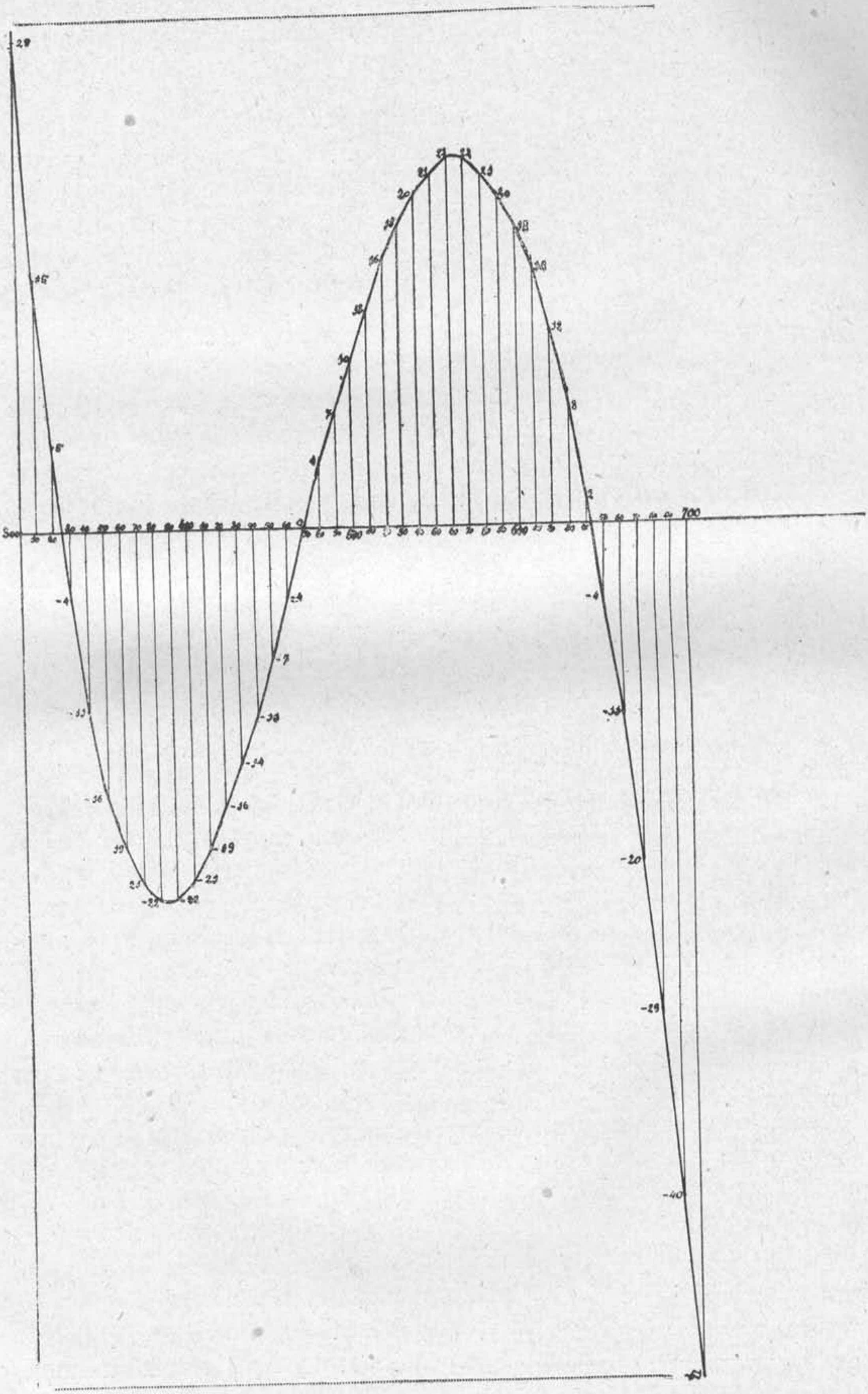
Sobre dos rectas perpendiculares o ejes coordenados, tomaremos los números y los errores; los primeros sobre el horizontal llamado también eje de las x, y los segundos sobre el vertical o de las y.

Como los valores que han de tomarse sobre el primero han de ser mucho mayores que sobre el segundo convendrá tomar dos escalas: la del eje de las x a medio milímetro por unidad y la del eje de las y a dos milímetros por unidad.

A partir un punto del eje horizontal tomaremos distancias de cinco en cinco milímetros: en el primer punto pondremos el número 300, en el 2.º, 310, en el 3.º, 320 y así sucesivamente hasta llegar a 700.

Por dichos puntos trazaremos perpendiculares y a partir de los mismos,

BRAC, 13 (1925) 281-289


500
600
700
28
-20
-29
-40

tomaremos las distancias indicadas en la tabla de mantisas. Como la unidad es el doble milímetro bastará duplicar los valores de los errores y tomar tantos milímetros como unidades resulten, hacia arriba los errores positivos y hacia abajo los negatioos.

Construída la curva de este modo afectará la forma siguiente que como es fácil ver se aproxima mucho a la curva de tercer grado explícita en y; y que es su ecuación $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Los puntos donde la curva corta al eje de las x, son aquellos para los cuales el error de la mantisa calculada es nulo cuando estas se toman con cuatro cifras.

Dichos puntos corresponden a los valores numéricos 325; 470 y 643,5 obtenidos por el cálcnlo, aunque se comprende que habrá otros números muy aproximados a estos para los cuales se cumpla la misma propiedad, como claramente puede comprobarse por la «Teoría elemental de errores».

Las mantisas verdaderas y calculadas de dichos números son:

Número	Mantisa V.	Mantisa C.	Error
325	0,511883	511875	-0,000008
470	0,672098	672100	0,000002
643,5	0,808549	808557	0,000008

Todos estos errores son menores que una cienmilésima de unidad.

El mínimo de la curva está aproximadamente en el valor numérico 385 y el máximo en el 570 a los que aproximadamente corresponden los valores —22 y +22.

El 375 tiene casi el mismo error negativo que 385 y el 466 $^2/_3$ casi lo mismo que el 470. También 566 $^2/_3$ tiene aproximadamente el mismo error que 570 y en cuanto a 643,5 y 650 solo varían sus errores en 4 unidades aproximadamente.

De todo lo dicho se deduce la serie siguiente de números que hay que tomar sobre el eje de las x, que los separaremos con una línea.

300—325—375—400—466 $^2/_3$ —500—566 $^2/_3$ —600—650 y 700.

Tracemos una línea horizontal y señalemos un punto hacia la derecha al que pondremos el número 300. Después tomemos a partir de dicho punto cuatro magnitudes iguales como de tres o cuatro centímetros. Si no tiene ninguna regla dividida a mano, se dobla un papel y se señala en el borde una longitud análoga a la indicada y se señala dicha división en la línea cuatro veces seguidas y se colocan los números de 400—500—600 y 700

En dichos puntos se levantan perpendiculares hacia arriba en los 300—500 y 600 y hacia abajo en el 400 y 700.

En la primera perpendicular se toman tres divisiones iguales entre sí y de una magnitud cualquiera aunque basta que sean de uno a dos centímetros cada división.

En el punto 400 se toman dos divisiones, en el 500 una, dos en el 600 y cinco en el 700, pues los errores 29;—21; 10; 18 y—51 varían muy poco de 30;—20; 10; 20 y—50.

Después la división 300 a 400 se divide en cuatro partes iguales y se ponen los números 325 y 375. Las divisiones 400 a 500 y 500 a 600 se dividen en tres partes iguales y por último la 600 a 700 en dos tomando un poco menor la primera que la segunda.

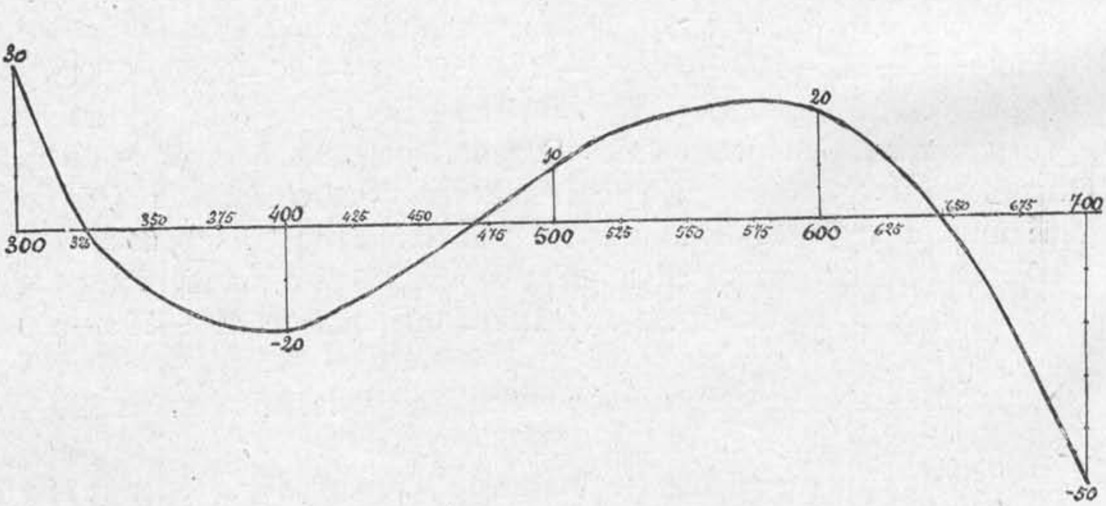
En el 875 se levanta hacia abajo una perpendicular y se toman dos divisiones y un quinto aproximadamente y lo mismo en la 566 $^{2}/_{3}$ la que se traza hacia arriba.

Los extremos de las perpendiculares trazadas y los puntos 325—466 $^{2}/_{3}$ y 650 se unen todos por un trazo contínuo y tendremos aproximadamente la curva de error.

Si no queremos tanta exactitud basta trazar las perpendiculares en los puntos 300—400—500—600 y 700 y después se sigue la regla siguiente: la primera divísión (300 a 400) se divide en cuatro partes iguales y se señala la primera; la segunda división en tres y se señala la segunda; la tercera no se divide y la cuarta sí, en dos partes iguales aproximadamente procurando que la primera sea algo menor. Después se unen los extremos de las perpendiculares que parten de los puntos 300—400—500—600 y 700 por una curva contínua procurando que pase por los puntos antes indicados, y tendremos de este modo una curva práctica de error que bastará para las aplicaciones que no precise mucha exactitud.

Las partes en que se divida cada segmento comprendido entre dos centenas consecutivas basta que sean cuatro donde se colocarán los números 325—350. . . . . hasta 375.

La siguiente curva nos da idea de cuanto hemos dicho.



Uso de la curva práctica de error

Supongamos que queremos determinar el logaritmo de 378. Se aplica primero el método del número 19, escribiendo de multiplicando la diferencia a 1900 que es 1522 y de multiplicador 378.

$$\begin{array}{r} 1522\times \\ 378 \\ \hline 12176 \\ 10654 \\ 4566 \\ \hline 575316 \end{array}$$

Tomando las cuatro primeras cifras será la mantisa 5753.

— Cálculo del error —

El número 378 está cerca del 375 al que corresponde aproximadamente de error—22.

Como está debajo del eje de las x, hay que agregar este número a la mantisa y nos dará 5775, luego log 378=2.5775.

Calculemos el logaritmo de 532.

$$\begin{array}{r} 1368\times \\ 532 \\ \hline 2736 \\ 4104 \\ 6840 \\ \hline 727776 \end{array}$$

— Cálculo del error —

El 532 está entre el 525 y 550 y próximo a la cuarta parte a partir del primero: trazando a ojo la perpendicular, nos da una longitud de 18 a 20, luego tomaremos 19 que restaremos de 7278 y nos dará 7259, de donde log. 532=2.7259 que es el verdadero.

De un modo análogo se calcularía el logaritmo de otro número cualquiera comprendido entre 300 y 700.

Caso en que el número está comprendido entre 100 y 300

Basta multiplicar el número por 2 ó por 3 según convenga; buscar el logaritmo del número resultante, que de este modo quedará comprendido en el caso anterior, y después restarle al resultado el logaritmo de 2 ó de 3 según el factor empleado, sabiendo que el logaritmo de 2 es 0.3010 y el de 3 es 0.4771.

En efecto se tiene que $N=\frac{Na}{a}$; de donde log N=log (Na)—loga. y haciendo a=2 ó á 3 resulta que

log N=log (2N)—log 2 ó bien log N=log (3N)—log3.

Un solo ejemplo bastará para comprender bien este caso. Busquemos el logaritmo de 174.

El duplo de 174 es 348.

Cálculo de log 348

$$\begin{array}{r} 1552+ \\ 348 \\ \hline 12416 \\ 6208 \\ 4656 \\ \hline 540096 \end{array}$$

Tomando cuatro cifras la mantisa será 5401 y como el error es aproximadamente 14 (véase la curva de error) tendremos que la mantisa será 5415 de donde el logaritmo

de 174 será $\left.\begin{array}{r} 2.5415 \\ -0.3010 \end{array}\right\} =2.2405$

que es el logaritmo verdadero indicado en las tablas.

Pudiera haber variado dos o tres unidades en más o en menos, dependiendo esto del mayor o menor cuidado que pongamos al construir la curva, pero siempre el error será menor que media milésima de la mantisa si la curva se ha construído con algún cuídado.

Como comprobaeión busquemos el logaritmo del mismo número empleando el factor 3.

El triplo de 174 es 522. La mantisa calculada es 7193 y como el error es 16 que hay que restarlo en este caso según indica la curva el logaritmo será 2.7177 al que restándole el de 3 que es 0.4771 nos da 2.2406 que no varía nada más que en una unidad del anterior y ambos en media unidad del último orden con respecto al verdadero que es 2.24055.

Esto nos dice también que cuando empleemos dos procedimientos debemos tomar la media aritmética del resultado y también que cuando queramos tener seguridad en el valor del logaritmo lo debemos de calcular por dos procedimientos distintos por lo menos.

Caso en que el número esté comprendido entre 700 y 1000

Cuando el número está comprendido entre 700 y 1000 ó mejor entre 670 y 1000, bastará dividir por 2 para venir al primer caso.

Se tiene en general que como $N = \frac{N}{a} \times a$, tomando los logaritmos nos dará $\log N = \log\left(\frac{N}{a}\right) + \log a$ y haciendo $a=2$, tendremos que $\log N = \log\left(\frac{N}{2}\right) + \log 2$.

Ejemplo: Calcular el logaritmo de 876.

Se tiene que $\frac{876}{2} = 438$.

El logaritmo de 438 es 2.6415 (ya rectificado) y por tanto log 876=

$$\log 438 + \log 2 = \left\{ \begin{array}{r} 2.6415 \\ +0.3010 \\ \hline 2.9425 \end{array} \right. \text{ que es el verdadero.}$$

Si el número es impar su mitad no es exacta en números enteros pero sí en las décimas, y entonces se haya dicha mitad y se resta de 19000 en vez de 1900.

Ejemplo: logaritmo de 759.

Se tiene que 759 : 2= 379,5 de donde el logaritmo se hallará multiplicando 19000—3795=15205 por 3795 que nos da por mantisa 5770 y como el error a sumar es 23 se tiene que log 379,5=2.5770+23=2.5793 y

$$\text{por tanto } \log 759 = \left\{ \begin{array}{r} 2.5793 \\ +0.3010 \\ \hline 2.8803. \end{array} \right.$$

El error es algo mayor que media unidad del último orden toda vez que log 759=2.88924.

El método de multiplicador invertido nos hubiera ahorrado trabajo en la multiplicación.

Caso en que el número dado no esté comprendido entre 100 y 1000.

Como la mantisa del logaritmo de un número no varía al multiplicarlo o dividirlo por la unidad seguida de ceros, siempre podemos hacer que el número tenga tres o cuatro cifras enteras según convenga, pues como la característica se sabe siempre determinar, por las reglas sencillísimas de la teoría de los logaritmos, las que desde luego nos abstenemos de indicar, tendremos que si queremos buscar el logaritmo de 27, como su característica es 1, bastará buscar la mantisa de 270.

Si fuera 3,09 sabiendo que la característica es O, buscaríamos la mantisa de 309.

Si fuese el número 0,000873 buscaríamos la mantisa de 873 y así sucesivamente. La característica es $\bar{4}$.

Por último, cuando la parte significativa del número sea mayor que 1000 bastará tomar solamente cuatro cifras aproximando por exceso o por defecto según convenga, y prescindir de las demás del número, para obtener la aproximación deseada.

Ejemplos: logaritmo de 394780000.

La característica es 8 y para la mantisa tomaremos 3948 y como minuendo 19000.

Si queremos el logaritmo de 0,0049813712, sabiendo que la característica es $\bar{3}$, bastará buscar la mantisa de 4981. Como vemos todos los casos se reducen a tomar como minuendo 1900 ó bien 19000

De poco nos serviría resolver el problema de buscar sin tablas el logaritmo de un número, si no supiéramos del mismo modo resolver el problema contrario.

En el próximo número, Dios mediante, nos ocuparemos del modo de resolver esta importante cuestión.

Dionisio Ortiz.