

Reducción del paquete de ondas.

En el apartado anterior hemos visto que la mecánica cuántica nos permite hacer predicciones sobre el resultado de una medida en forma de probabilidades. Sólo en el caso en que la partícula tenga un valor bien definido de un observable tendremos certeza sobre la medida de dicho observable. Por otro lado, si para algún autovalor a el producto escalar $\langle \varphi_a | \psi \rangle$ es nulo, también tendremos certeza de que no obtendremos nunca el valor a como resultado de la medida del observable A . En este apartado vamos a ver que el estado de la partícula sufre un cambio drástico cuando realizamos la medida de un observable.

Supongamos que una partícula se encuentra en un estado dado por el ket $|\psi\rangle$. Si tenemos un observable A que queremos medir, para conocer la probabilidad de obtener un resultado concreto al medir dicho observable, lo primero que necesitamos es resolver el problema de autovalores del observable A , es decir, calcular sus autovalores y autovectores. Por ejemplo, si encontramos que el espectro de A es discreto y no degenerado, compuesto por la serie de valores a_i , si los autovectores correspondientes normalizados son los vectores $|\varphi_i\rangle$, según hemos visto anteriormente, la probabilidad de obtener como resultado de la medida de A el valor a_i viene dado por el valor $|\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$.

Ahora bien, una vez que hemos medido el observable A tenemos certeza de su valor, es decir que si inmediatamente después (de modo que no dejemos a la partícula tiempo para evolucionar) volvemos a medir el observable A obtendremos el mismo valor a_i . Por tanto, después de haber medido el observable el estado de la partícula será el autovector del observable A de autovalor a_i , es decir, que el estado será el vector $|\varphi_i\rangle$. Por tanto, el proceso de medida produce un cambio drástico en el estado de la partícula. Antes de la medida el estado era el vector $|\psi\rangle$ y justo después de la medida el estado será el vector $|\varphi_i\rangle$, si hemos obtenido como resultado de la medida de A el valor a_i . Este cambio brusco del estado de la partícula se denomina "reducción del paquete de ondas". Antes de realizar la medida no conocemos con certeza el resultado que obtendremos en la medida; sin embargo, una vez que hemos realizado la medida ya no tenemos incertidumbre sobre el valor del observable sino que conocemos su valor. Lógicamente el estado de la partícula debe contener esta nueva información.

Vamos a ver qué ocurre cuando el espectro del observable es degenerado. Supongamos que el observable A tiene su espectro discreto y degenerado, y sea $\{|\varphi_i^j\rangle\}$ una base ortonormal de autovectores del observable A de autovalores a_i . Si el autovalor a_i tiene grado de degeneración g_i , entonces j varía entre 1 y g_i para cada valor de i . Si inicialmente la partícula se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ y realizamos una medida del observable A , de modo que obtenemos como resultado el valor a_i , el estado de la partícula se modificará para incluir esta nueva información. El nuevo estado de la partícula después de la medida será un autovector de A de autovalor a_i . Pues bien, el estado normalizado de la partícula después de la medida viene dado por la siguiente expresión:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sum_j \langle \varphi_i^j | \psi \rangle |\varphi_i^j\rangle}{\sqrt{\sum_j |\langle \varphi_i^j | \psi \rangle|^2}}$$

Podemos entender este resultado descomponiendo el estado de la partícula antes de la

medida en serie de los autovectores de A . Antes de la medida el estado del sistema es:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_j \langle \varphi_i^j | \psi \rangle |\varphi_i^j\rangle$$

Al realizar la medida y obtener el valor a_i el paquete de ondas se reduce, de modo que después de la medida sólo permanece la parte del paquete de ondas original correspondiente al autovalor a_i , es decir que el estado de la partícula después de la medida será proporcional al siguiente ket:

$$\sum_j \langle \varphi_i^j | \psi \rangle |\varphi_i^j\rangle$$

Por último, lo normalizamos dividiéndolo por su norma y el resultado que se obtiene es el ket normalizado $|\psi'\rangle$. Hay una forma más elegante de presentar el ket después de la medida. Vamos a notar por P_i al proyector correspondiente al autovalor a_i (es el proyector que proyecta sobre el subespacio donde se encuentran todos los autovectores de A con autovalor a_i). Es decir que P_i es el operador:

$$P_i = \sum_j |\varphi_i^j\rangle \langle \varphi_i^j|$$

Pues bien, el estado de la partícula después de haber realizado la medida y haber obtenido el resultado a_i será:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}}$$

Podemos utilizar también el proyector P_i para expresar la probabilidad de que al medir el observable A obtengamos el valor a_i . Esta probabilidad venía dada por la expresión:

$$P(a_i) = \sum_j |\langle \varphi_i^j | \psi \rangle|^2 = \sum_j \langle \psi | \varphi_i^j \rangle \langle \varphi_i^j | \psi \rangle = \langle \psi | P_i | \psi \rangle$$

El utilizar el proyector tiene una ventaja y es que podemos obtener nuevos resultados utilizando las mismas expresiones. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la probabilidad de que al medir el observable A encontremos un valor comprendido entre a_l y a_m . No es difícil ver que esta probabilidad vale:

$$\mathcal{P}(a_l \leq a_i \leq a_m) = \sum_{l \leq i \leq m} \sum_j |\langle \varphi_i^j | \psi \rangle|^2$$

Si definimos un nuevo proyector $P_{l \leq i \leq m}$ como $P_{l \leq i \leq m} = \sum_{l \leq i \leq m} \sum_j |\varphi_i^j\rangle \langle \varphi_i^j|$ que es el operador que proyecta sobre todos los autovectores de autovalor a_i que verifican la condición $a_l \leq a_i \leq a_m$, la probabilidad anterior vale:

$$\mathcal{P}(a_l \leq a_i \leq a_m) = \langle \psi | P_{l \leq i \leq m} | \psi \rangle$$

Supongamos que tenemos un aparato que no tiene una gran sensibilidad, de modo que sólo es capaz de decirnos si el valor del observable A se encuentra comprendido entre a_l y

a_m . En este caso, la probabilidad de que el valor de A esté comprendido en dicho intervalo y que el aparato lo detecte viene dado por la expresión que acabamos de exponer. Por otro lado, una vez que se ha realizado la medida, si ha resultado que el valor de A se encuentra en el intervalo $[a_l, a_m]$ el estado de la partícula después de la medida viene dado por:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_{l \leq i \leq m} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_{l \leq i \leq m} | \psi \rangle}}$$

Por último, vamos a considerar el caso de espectro continuo. Supongamos que el observable A tiene un espectro continuo, de modo que los autovalores vienen dados por una variable continua a . Vamos a suponer que $\{|\varphi_a\rangle\}$ es una base de autovectores de a . Podemos preguntarnos cuál será la probabilidad de que al medir el observable A encontremos un valor comprendido entre un cierto valor a_1 y otro valor a_2 . Si utilizamos los proyectores la respuesta es inmediata. Vamos a notar por $P_{a_1 \leq a \leq a_2}$ al proyector correspondiente a los autovalores que verifican la condición $a_1 \leq a \leq a_2$. Este proyector vale:

$$P_{a_1 \leq a \leq a_2} = \int_{a_1}^{a_2} da |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a|$$

Una vez encontrado el proyector, la probabilidad que buscamos vendrá dada por:

$$\mathcal{P}(a_1 \leq a \leq a_2) = \langle \psi | P_{a_1 \leq a \leq a_2} | \psi \rangle = \int_{a_1}^{a_2} da \langle \psi | \varphi_a \rangle \langle \varphi_a | \psi \rangle = \int_{a_1}^{a_2} da |\langle \varphi_a | \psi \rangle|^2$$

Como ejemplo, supongamos una partícula que se mueve en una sólo dimensión. La probabilidad de que al medir su posición la partícula se encuentre comprendida entre un cierto valor x_1 y otro valor x_2 , vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1 \leq x \leq x_2) &= \langle \psi | P_{x_1 \leq x \leq x_2} | \psi \rangle = \int_{x_1}^{x_2} dx \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx |\langle x | \psi \rangle|^2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \psi^*(x) \psi(x) \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve en tres dimensiones y sólo medimos la componente x de su posición, además tendremos que integrar para todos los posibles valores de y y de z , es decir que la probabilidad será:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1 \leq x \leq x_2) &= \langle \psi | P_{x_1 \leq x \leq x_2} | \psi \rangle = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle \psi | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi \rangle \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz |\langle \mathbf{r} | \psi \rangle|^2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Por último, nos podemos preguntar cuál será el estado de la partícula después de la medida si el resultado de la medida ha sido que la componente x de la posición de la partícula se encuentra en el intervalo $[x_1, x_2]$. De acuerdo con lo que hemos visto anteriormente el estado será:

$$|\psi'\rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle}{\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})}}$$

Vamos a ver cómo se interpreta este resultado. Para simplificar un poco las ecuaciones vamos a notar por N a la constante de normalización, de modo que $N = \sqrt{\langle \psi | P_{x_1 \leq x \leq x_2} | \psi \rangle} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})}$. Podemos expresar el estado de la partícula después de la medida como:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \psi(\mathbf{r}') |\mathbf{r}'\rangle$$

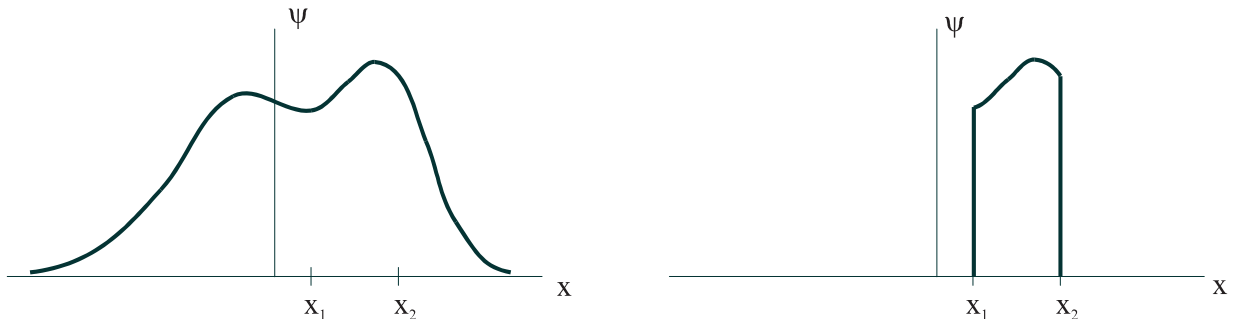
(hemos cambiado las variables de integración x, y, z por x', y', z' lo cual no cambia nada al ser variables mudas). Para darnos cuenta de lo que ha ocurrido en el proceso de medida vamos a obtener el estado $|\psi'\rangle$ en la representación coordenadas. Lo único que tenemos que hacer es multiplicar por el bra $\langle \mathbf{r} |$:

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \psi(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle = \\ &= \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \psi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \psi(\mathbf{r}') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \\ &= \frac{1}{N} \int_{x_1}^{x_2} dx' \psi(\mathbf{r}') \delta(x - x') \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac la función de onda después de la medida vale:

$$\psi'(r) = \begin{cases} \psi(r) & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{si } x < x_1 \text{ ó si } x > x_2 \end{cases}$$

Por tanto el proceso de medida lo que hace es truncar la función de onda y se queda con la parte original de la función de onda que verifica la condición $x_1 \leq x \leq x_2$. En la siguiente figura se puede ver el proceso que sufre la función de onda en el proceso de medida.



Aunque las ecuaciones se puedan complicar la forma de calcular probabilidades y el estado de la partícula después de la medida es siempre la misma.