Herleitung Masse-Geschwindigkeitsgesetz

$$F(t) = \frac{dp}{dt}$$
$$= \frac{d\left(m(t)\cdot v(t)\right)}{dt}$$
$$= m(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dm}{dt} = \frac{dE}{ds}$$

auf beiden Seiten multiplizieren mit dt ergibt

$$m\,dv + v\,dm = dE\frac{dt}{ds}$$
$$m\,dv + v\,dm = \frac{dE}{v}$$
$$dE = mv\,dv + v^2\,dm$$

Laut Einstein gilt

$dE = c^2\,dm$ also folgt:

$$\left(c^2 - v^2\right)dm = mv\,dv$$

Nach Variablentrennung:

$$\frac{dm}{m} = \frac{v\,dv}{c^2 - v^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}dv$$

Variiert v im halboffenen Intervall [0, c), so ist $\frac{v}{c}$ im Intervall [0, 1) und kann als Sinus eines Winkels $\theta,\ 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse der Länge c und Gegenkathete v aufgefasst werden. Ich substituiere also:

$$\frac{v}{c} = x,\ dv = c\cdot dx \Rightarrow$$
$$\frac{dm}{m} = \frac{x\,dx}{1 - x^2},\ x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta\,d\theta \Rightarrow$$
$$\frac{dm}{m} = \tan\theta\,d\theta$$

Auf beiden Seiten das bestimmte Integral über die zusammengehörigen Grenzen

$$\left(m_0,\ \theta_0 = \arcsin\left(\frac{v_0}{c}\right)\right),\ \left(m,\ \theta = \arcsin\left(\frac{v}{c}\right)\right) \quad :$$
$$\int_{m_0}^{m}\frac{d\mu}{\mu} = \int_{\theta_0}^{\theta}\tan u\,du$$
$$\left[\ln(\mu)\right]_{m_0}^{m} = \left[-\ln(\cos u)\right]_{\theta_0}^{\theta}$$
$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \ln\left(\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\right) = \ln\left(\frac{\cos\arcsin\left(\frac{v_0}{c}\right)}{\cos\arcsin\left(\frac{v}{c}\right)}\right)$$

v / c ist ein Sinus und cos arcsin (v / c) fragt nach dem zugehörigen Kosinus. Bei gegebenem Sinus x = v / c ergibt sich der Kosinus als $\sqrt{1 - x^2}$:

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{m}{m_0}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ v_0=0\Rightarrow$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Die Massen verhalten sich umgekehrt wie die Kosinusse der Winkel im v,c-Dreieck.
Damit habe ich ein einfaches m-v-Gesetz.

Jetzt kann man die Formel für die kinetische Energie in Abhängigkeit von v und m heleiten:

$$dE=mv\,dv+v^2\,dm=\frac{m_0\,cv\,dv}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{m_0cv^3\,dv}{\sqrt{\left(c^2-v^2\right)^3}}=\frac{m_0\,cv\,dv}{\sqrt{c^2-v^2}}\cdot\left(1+\frac{v^2}{c^2-v^2}\right)=$$

$$m_0\cdot\sqrt{\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}\right)^3}\cdot vdv=c^2dm\Rightarrow E_{kin}=m_0\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)=$$

$$m_0c^2\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}-1\right)$$

Man kann sich fragen, auf welche Geschwindigkeit ein ruhendes Teilchen der Masse m_0 gebracht wird, wenn seine kinetische Energie von 0 auf $\frac{h\cdot c}{\lambda}$ anwächst:

$$\frac{h\cdot c}{\lambda}=m_0c^2\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}-1\right)$$

$$\frac{h}{\lambda\,m_0\,c}=\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}-1$$

$$\left(1+\frac{h}{\lambda\,m_0\,c}\right)^2=\frac{c^2}{c^2-v^2}\Rightarrow c^2-v^2=c^2\cdot\left(\frac{\lambda\,m_0c}{\lambda\,m_0c+h}\right)^2\Rightarrow v^2=c^2\left(1-\left(\frac{\lambda\,m_0\,c}{\lambda\,m_0\,c+h}\right)^2\right)$$

$$v=c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\lambda\,m_0\,c}{\lambda\,m_0\,c+h}\right)^2}$$

Interessant! Ist $m_0=0$, so ist v immer gleich der Lichtgeschwindigkeit, unabhängig von der Photonenenergie. Das könnte heißen, das alle Photonen - egal welche Wellenlänge - gleich schnell sind. Obwohl streng genommen $m_0=0$ verboten ist, da $\frac{h\cdot c}{\lambda}>0$. Die erste Glg. gilt nur, falls $m_0>0$ ist, die letzte hingegen gilt auch für $m_0=0$. Man kann also aus Glg. mit Gültigkeitsbereich A Formeln ableiten mit Gültigkeitsbereich B, B > A. Ein Teilchen mit derselben

Ruhemasse wie der relativistischen Masse $\frac{h}{\lambda c}$ eines Photons der Wellenlänge λ hätte nach Absorption eines solchen Photons die Geschwindigkeit $\frac{\sqrt{3}c}{2}$.

Die kinetische Energie ist genau das $c^2 - fache$ des mit der Geschwindigkeit v einhergehenden relativistischen Massezuwachses $\Delta m = m(v) - m_0$. Für wachsende Ruhemasse geht der Term $\frac{\lambda m_0 c}{\lambda m_0 c + h}$ und damit auch sein Quadrat bei Null beginnend schnell asymptotisch von unten gegen Eins. Also geht $1 - \left(\frac{\lambda m_0 c}{\lambda m_0 c + h}\right)^2$ und damit auch die Wurzel daraus für wachsende Ruhemasse schnell gegen Null, die Geschwindigkeit ist c mal diese Wurzel, sie geht mit wachsender Ruhemasse auch ziemlich schnell gegen Null, etwas gebremst durch den recht großen Wert von c. Interessant auch, dass die Wellenlänge - umgekehrt proportional zur zugeführten Energie - den gleichen Effekt hat wie die Ruhemasse. Es spielt keine Rolle, ob ich die Wellenlänge des absorbierten Photons oder die Ruhemasse um einen bestimmten Faktor vervielfache, in beiden Fällen sinkt v um den gleichen Betrag.

Setze ich $\alpha_v = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, so gilt interessanterweise $\alpha_v = \frac{\lambda m_0 c + h}{\lambda m_0 c}$. Man sieht nochmal, dass die beiden Bedingungen $v = c \wedge m_0 = 0$ unbedingt zusammengehören und die kinetische Energie als freie Energie beschreiben. Diese hat keine Ruhemasse und verteilt sich im Raum mit der Geschwindigkeit c.

kinetische Energie sein heißt $m_0 = 0$
kinetische Energie haben heißt $m_0 > 0$.

Setzt man $F(t) = const = F$, so kann man einfache Zeitgesetze für Energie, Masse, Geschwindigkeit und Beschleunigung ableiten:

$$F = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m = \frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt}v + \frac{dv}{dt}m = \frac{dv}{dt}\left(\frac{dm}{dv}v + m\right) =$$

$$\frac{dv}{dt}\left(\frac{m_0 c v^2}{(c^2 - v^2)\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\frac{dv}{dt}\left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1\right) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\frac{dv}{dt}\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right) \Rightarrow$$

$$dS = F\,dt = m_0\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right)^{\frac{3}{2}} dv$$

$$F \cdot t = m_0 \cdot \int \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right)^{\frac{3}{2}} dv$$

$$Substitution:$$

$$\frac{v}{c} = \sin\theta \Rightarrow \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\cos^2\theta},\ dv = c \cdot \cos\theta \cdot d\theta \Rightarrow$$

$$F \cdot t = m_0 c \int \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta\, d\theta = m_0 c \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = m_0 c \tan\theta = m_0 c \sin\theta \frac{1}{\cos\theta} =$$

$$m_0 c \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow$$

$$v_F(t) = c\cdot\frac{Ft}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}},\ a_F(t) = \frac{dv_F}{dt}(t) = c\cdot\frac{F\,m_0^2c^2}{\sqrt{\left(m_0^2c^2 + F^2t^2\right)^3}},\ a_F(0) = \frac{F}{m_0}(Newton)$$

$$m_F(t) = m_0\cdot\frac{c}{\sqrt{c^2 - v_F^2(t)}} = \frac{1}{c}\cdot\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}$$

Für $m_0 = 0$ ist wieder $v_F(t) = const = c$. Die Masse ist ein nach oben offener Hyperbelast, startend bei m_0 , asymptotisch von oben sich an die Gerade $\left(t, \frac{F}{c}t\right)$ anschmiegend. Die Beschleunigung geht gegen Null, die Geschwindikeit gegen c und die Masse und damit auch die kinetische Energie gegen Unendlich. Die Masse nimmt nahezu linear mit der Zeit zu mit Proportionalitätsfaktor F / c. Dem korrespondiert ein nahezu linearer Energiezuwachs mit Faktor F * c. Interessant ist $m_0 = 0 \Rightarrow m_F(t) = \frac{F}{c}\cdot t$. Da außer Gravitation nichts Licht bremsen oder beschleunigen kann und Gravitation keine Kraft ist, ist im Allgemeinen F = 0. Nimmt man aber einen relativistischen Massezuwachs von $\frac{h}{\lambda c} = \frac{F}{c}\cdot t$ an, so erfährt man, dass dem eine Impulsänderung von $\frac{h}{\lambda} = F\cdot t$ entspricht. Die Zeit ist also genau so lang, wie es braucht, um mit der konstanten Kraft F den Impuls von 0 auf $\frac{h}{\lambda}$ zu ändern. Nimmt man an, dass t sehr klein ist, muß F sehr groß sein und ganz kurz wirken. Interessant wäre noch ein Weg-Zeit-Gesetz:

$$x_F(t) = \int_0^t v_F(\tau)\,d\tau = c\int_0^t \frac{F\tau}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2\tau^2}}\,d\tau = \frac{c}{F}\cdot\left[\sqrt{m_0^2c^2 + F^2\tau^2}\right]_0^t = \frac{c}{F}\cdot\left(\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} - m_0c\right) =$$

$$\frac{\left(E_{kin}\right)_F(t)}{F} = \frac{\left(m_F(t) - m_0\right)c^2}{F}$$

Klar, denn $F = const \Rightarrow \Delta E_{kin} = F\cdot\Delta x$.

Die Energie, welche bei der Reaktion von 1 g Materie mit 1g Antimaterie frei wird, soll sich einem Körper der Ruhemasse $m_0 = 1000\ kg$ in einem homogenen Kraftfeld mitteilen. Auf welche Geschwindigkeit wird er aus der Ruhe beschleunigt?

$$E_{kin} = m_0c^2\left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} - 1\right)$$

$$v = c\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E_{kin} + m_0c^2}\right)^2} = 3\cdot10^8\sqrt{1 - \left(\frac{1000\cdot9\cdot10^{16}}{1{,}8\cdot10^{14} + 1000\cdot9\cdot10^{16}}\right)^2} = 599{,}99\frac{km}{s}$$

$$(Newton)$$

$$E_{kin} = \frac{m_0}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_0}} = \sqrt{\frac{3{,}6\cdot10^{14}}{10^3}} = \sqrt{36\cdot10^{10}} = 6\cdot10^5\frac{m}{s}$$

Bei 2 g = 180 Billionen Nm Energie läuft es immer noch annähernd wie bei Newton.
Noch ein interessanter Zusammenhang:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1$. Was ist nun aber die Trägheit? Bei Newton gilt $a \sim \frac{1}{m_0}$. Also ist einfach die Masse die Trägheit. Bei konstanter Kraft gilt:

$\frac{1}{m_F^3(t)} = \frac{c^3}{\sqrt{\left(m_0^2 c^2 + F^2 t^2\right)^3}} \Rightarrow a_F(t) = F m_0^2 \cdot \frac{1}{m_F^3(t)} \Rightarrow a_F(t) \sim \frac{1}{m_F^3(t)}$. Bei konstanter Kraft wirkt die träge Masse kubisch der Beschleunigung entgegen! Sie wächst außerdem mit der Zeit, nahezu linear mit Faktor F / c wie oben beschrieben. Es erhebt sich die Frage, ob diese Beziehung ggf. unabhängig von der Bedingung $F = const$ ist:

$$F = m\frac{dv}{dt}\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right) = m\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) = m\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{1-\left(1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right)}\right) = \frac{m^3}{m_0^2}\frac{dv}{dt} = \frac{m^3}{m_0^2} a \Rightarrow$$

$$a = F m_0^2 \frac{1}{m^3}$$

Der a-F-Zusammenhang besteht mithin unabhängig davon, ob F = const oder nicht. Also haben wir wieder den Fall, dass aus einer Gleichung mit Gültigkeit für A < B eine Gleichung abgeleitet werden kann, die auch in B - A gilt. Man ahnt auch warum: Was in B gilt, muß erst recht in A gelten. Man kann alles in A geltende also darauf prüfen, ob es auch allgemeiner gilt. Damit ist klar, dass die träge Masse per se kubisch wirkt. Man sieht auch, dass freie Energie nicht beschleunigt werden kann. Ein Körper der Masse m erfahre im Schwerefeld die Beschleunigung g. Drittele ich die Masse, dürfte die Beschleunigung nur noch ein 27-tel von g betragen. Dem ist aber nicht so. Wie ist das möglich? Nur so, dass F selbst eine Funktion von m ist und um den selben Faktor - hier das 27-fache - vervielfacht wird:

$a \sim \frac{1}{m^3},\ F \sim m^3$. Die Stärke des gravitativen Beschleunigungsfeldes nimmt kubisch mit der Masse des dem Feld ausgesetzten Körpers zu. Gleichzeitig wird er im selben Maße träger. Damit bleibt die Beschleunigung konstant.

$a \sim \frac{1}{m^3},\ a \sim F,\ F \sim m^3 \Rightarrow a = const$. Der relativistische Massezuwachs ist die Masse der zugeführten kinetischen Energie. Energie ist nicht masselos, auch wenn Energie keine Ruhemasse hat - einfach weil freie Energie nicht in Ruhe sein kann, nur als Materie gebundene Energie. Da Materie aus Licht entstanden ist, ist sie selbst Energie. Aber eben keine freie Energie. Die direkte Proportionalität von a und F besteht wie bei Newton. Ist $F' = \alpha F$, so ist $a'(t) = \alpha a(t)$, man hat also ein Vielfaches der ursprünglichen a-t-Funktion. Der Unterschied ist, dass eine Konstanz der Kraft nicht die Konstanz der Beschleunigung bedeutet.

Im Pferdchen-Kutsche-Modell oder Gespann-Modell folgende gedankliche Konstruktion: Eine anfänglich ruhende Kutsche ($v_0 = 0$) der Masse m_K fange sich sukzessive jeweils ein weiteres Pferdchen der Geschwindigkeit v_P und der Masse m_P ein, das Gespann wird also um immer eins mehr an uniformen Pferdchen erweitert. Folgende Frage: Wie ist die Geschwindigkeit v_n der Kutsche, nachdem diese n Pferdchen aufgesammelt hat? Betrachte das ganze unter Zuhilfenahme des Impulserhaltungssatzes. Es ist $m_0 = m_K,\ m_k = m_K + k \cdot m_P$ und es gilt $m_k \cdot v_k = p_k = k \cdot m_P \cdot v_P$, da ja aller Impuls von den Pferdchen stammt. Damit ist $v_k = \frac{k\, m_P}{m_k} \cdot v_P = \frac{k\, m_P}{m_K + k\, m_P} \cdot v_P$. Setzt man $m_K = m_{0,}\ v_P = c\,,\ m_P = \frac{h}{\lambda c}$, so erhält man $v_k = \frac{kh}{m_0 \lambda c + kh} \cdot c$, insbesondere also $v_1 = \frac{h}{m_0 \lambda c + h} \cdot c$ im Widerspruch zu obiger Formel. Die Kutschen-Formel stammt aus einer diskreten, quantenhaften, Überlegung, obige Formel bezieht sich auf ein kontinuierliches Kraftfeld. Offenbar ist $dm_k = dm = m_P = \frac{h}{c\lambda}$ und $dE_k = dE = \frac{hc}{\lambda}$. Wie verträgt sich das mit $dE = v(m\,dv + v\,dm) = v\,dp$? Ach ja:

$dp_k = dp = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow dE = c\,dp$. Oder anders: Inwieweit ist

$dp = m_k dv_k + v_k dm$ erfüllt? Es kann nie ganz erfüllt sein, da nie $v = c$.

$$dp = p_{k+1} - p_k = m_{k+1} v_{k+1} - m_k v_k = (m_k + dm)(v_k + dv_k) - m_k v_k = m_k v_k + m_k dv_k + v_k dm + dm\,dv_k - m_k v_k = m_k dv_k + v_k dm + dm\,dv_k \;.$$

Das Glied $dm\,dv_k$ verschwindet nicht, darum ist die Dffgl. $dp = m_k dv_k + v_k dm$ nicht erfüllt.

Je mehr v sich an c annähert, umso eher gilt $dp = m_k dv_k + v_k dm$, da $\lim\limits_{v \to c} dv_k = 0$.

Insbesondere sieht man aber, dass auf kleinen Skalen $E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} - 1 \right)$ nicht gilt, da die Voraussetzung hierfür eben $dp = m_k dv_k + v_k dm$ wäre.
Für dv_k gilt:

$$dv_k = \frac{1}{m_{k+1}} (dp - v_k dm) = \frac{m_0}{m_k m_{k+1}} dp \;.$$

Setzt man
$m_k = \frac{m_0 c^2 + kh\nu}{c^2}$, $v_k = \frac{kh\nu}{m_0 c^2 + kh\nu} c$, so sieht man leicht, dass

$kh\nu = E_{kin} = m_k v_k c = p_k c = (m_k - m_0) c^2$. Obwohl $m_k \neq \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v_k^2}}$ folgt doch mit der Setzung $m_k = m \Rightarrow E_{kin} = c^2 (m - m_0)$.

Interessant ist auch $p_k = (m_k - m_0) c$. Der Impuls ist genau gleich der Masse der k Photonen multipliziert mit der Photonengeschwindigkeit.

Laut obiger Rechnung ist

$$p = mv = mc\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2} = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - c^2 \left(1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2\right)}} \cdot c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2} =$$

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 \left(1 - \left(1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2\right)\right)}} \cdot c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2} = m_0 \cdot \frac{E_k + E_0}{E_0} \cdot c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2} =$$

$m_0 c\sqrt{\left(\frac{E_k + E_0}{E_0}\right)^2 - 1} = c\sqrt{m^2 - m_0^2}$ Interessanterweise ist wegen $m \geq m_0$ auch $\sqrt{m^2 - m_0^2} \geq m - m_0 \Rightarrow p \geq p_k$.

Aus $\Delta p = F \Delta t$ ersieht man aus obigen Formeln noch:

$$v = \frac{p}{\sqrt{p_0^2 + p^2}} \cdot c\,,\ m = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{p_0^2 + p^2}\,,\ p_0 = m_0 c$$

Neuauflage: Senkrechter Wurf nach oben

Man geht aus von einem Schwerefeld mit $g(x) \sim -\frac{1}{x^2}$, die Fallbeschleunigung ist also umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes x vom Mittelpunkt des felderzeugenden Körpers mit Masse M und Radius R. Es ist dann $g(x) = -\gamma M \cdot \frac{1}{x^2}$ und es gilt für einen Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v_0

$\dot{x} = v_0 + v_g = v_0 + \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$. Die Funktion $g(t)$ ist aber nicht bekannt, es ist lediglich bekannt, dass $g = \ddot{x} = -\gamma M \cdot \frac{1}{x^2}$, also eine Differentialgl. des Typs

$\ddot{x} = \phi(x)$. Ein Lehrbuch sagt, dass dann gilt:

$\dot{x} = \sqrt{2\int \phi(x)\, dx + C}$. Für das vorliegende Problem ergibt das

$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{x(t)} + C_1}$. Die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ soll v_0 sein, der Anfangsort oder der Anfangsabstand vom Mittelpunkt des felderz. Körpers $x(0)$ soll R sein. Diese Randbedingungen gestatten die Berechnung von C_1 :

$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R} + C_1} \Rightarrow C_1 = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R}$. In einem früheren Papier hatte sich bereits herausgestellt, dass C_1 eine Art Diskriminante ist. Ist $C_1 < 0$, so fällt der geworfene kleine Probekörper zum schweren Körper zurück. Ansonsten gelingt dem Probekörper die Flucht in beliebig große Abstände zum Mittelpunkt. Setzt man $v_0 = c$, so erhält man für $C_1 = 0$ den Schwarzschild-Radius zur Masse M: $c^2 = \frac{2\gamma M}{R_{Schwarzschild}} \Rightarrow R_{Schwarzschild} = \frac{2\gamma M}{c^2}$. Und das ganz ohne Einstein-Feldgleichungen - wer hätte das gedacht?

Im Zusammenhang mit dem Thema Licht-Energie-Ect. ist der Fall $C_1 \geq 0$ interessant. Im Falle $C_1 = 0$ ergibt sich $x(t) = \sqrt[3]{\left(\frac{3c}{2}\right)^2 R\left(t + \frac{2R}{3c}\right)^2}$, ansonsten wird es etwas komplizierter. Ich gebe mal den kompletten Lösungsweg an: $\alpha = 2\gamma M$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\alpha}{x}+C_1}=\sqrt{\frac{\alpha+C_1x}{x}}=\sqrt{\frac{C_1\left(\frac{\alpha}{C_1}+x\right)}{x}}=\sqrt{C_1}\sqrt{\frac{\frac{\alpha}{C_1}+x}{x}}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\sqrt{\frac{x}{\frac{\alpha}{C_1}+x}}\,\mathrm{d}x,\ t+C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\int\sqrt{\frac{x}{\frac{\alpha}{C_1}+x}}\,\mathrm{d}x$$

Man kann die Variablentrennung also explizit nach der Zeit t entwickeln und steht nun vor dem Integral, welches in mehreren Schritten gelöst wird. Zunächst eine Substitution $w^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2w\,\mathrm{d}w$:

$$\int\sqrt{\frac{x}{\frac{\alpha}{C_1}+x}}\,\mathrm{d}x=2\cdot\int\frac{w}{\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}}\,w\,\mathrm{d}w\quad.$$

Setzt man $u(w)=\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2},\ v(w)=w$, so sieht man, dass

$(u\cdot v)'=u'v+uv'=\frac{w}{\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}}\,w+\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}$, also ist

$\int u'v=u\cdot v-\int uv'$ bzw. $\int\frac{w}{\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}}\,w\,\mathrm{d}w=w\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}-\int\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}\,\mathrm{d}w$ und das letzte Integral hat die Form $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ und laut Integraltabelle die Lösung $\frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$. Damit hat man mit $a^2=\frac{\alpha}{C_1}$:

$$\int\frac{w}{\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}}\,w\,\mathrm{d}w=w\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{C_1}\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}\,w\right)+w\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(w\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}-\frac{\alpha}{C_1}\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}\,w\right)\right)$$

Also gilt

$\int\sqrt{\frac{x}{\frac{\alpha}{C_1}+x}}\,\mathrm{d}x=w\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}+w^2}-\frac{\alpha}{C_1}\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}\,w\right)=\sqrt{x\left(\frac{\alpha}{C_1}+x\right)}-\frac{\alpha}{C_1}\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}\,x}\right)$ und damit

$t+C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\left(\sqrt{x\left(\frac{\alpha}{C_1}+x\right)}-\frac{\alpha}{C_1}\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}\,x}\right)\right)=\Phi(x)$. Setzt man $C_2=\Phi(R)$, so ergibt sich t als das bestimmte Integral:

$t(x)=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\int_R^x\sqrt{\frac{\xi}{\frac{\alpha}{C_1}+\xi}}\,\mathrm{d}\xi=\Phi(x)-\Phi(R)$ Die Zeit also als Funktion vom Ort. Verkehrte Welt.

Man kann die Gleichung nicht elementar nach x auflösen. Und doch kann man die Weg-Zeit-Kurve berechnen.

Die t-x-Funktion setzt sich zusammen aus einer x-Hyperbel (mit 45°-Asymptote durch $\left(-\frac{\alpha}{2C_1}, 0\right), \left(0, \frac{\alpha}{2C_1}\right)$), die bei (0, 0) beginnt und einer Areafunktion, also der Umkehrfunktion einer Hyperbolischen Funktion, nämlich des Sinus Hyperbolicus, verkettet mit einer Wurzel. Beim freien Fall haben wir eine Zusammensetzung eines Kreises mit einem Kosinus. Dazu später mehr. Nun erstmal weiter zum Wurf. Es ist die Fluchtgeschwindigkeit für einen Körper der Masse M und Radius R $v_F = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$ und es sei die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = c$. Es geht also um ein Lichtteilchen, welches von einem Körper aus in den Raum entweicht. Statt der komplizierten Formel nehme ich mir die Formel $\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2\gamma M}{x(t)} + C_1}$ vor, welche Ort und Geschwindigkeit in Beziehung setzt. Man sieht sofort, dass $\lim_{x \to \infty} \dot{x}(t) = \sqrt{C_1} = \sqrt{c^2 - \frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{c^2 - v_F^2}$. Man könnte diesen Grenzwert als eine Art Endgeschwindigkeit des durch das g-Feld der Masse (M, R) gebremsten Photons verstehen. Es wäre die untere Schranke einer Geschwindigkeitsentwicklung beginnend bei c und asymptotisch gegen diese Grenzgeschwindigkeit gehend. Setzte man den durch keine Gravitation gestörten Gang des Lichtes mit dem gestörten ins Verhältnis:

$\frac{c}{\sqrt{c^2 - v_F^2}}$, so erhält man einen Ausdruck, welcher gleich dem Dillatationsfaktor $\alpha_{v_F} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_F}{c}\right)^2}$ ist. Ich nehme also stark an, dass im Abstand R vom Gravitationszentrum der Masse (M, R) der Zeitdehnungsfaktor genau $\alpha_{v_F} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_F^2}}$ ist, was die Frage aufwirft, inwieweit Gravitation äquivalent ist dem "dem Licht Hinterhereilen mit Geschwindigkeit v_F ". In beiden Fällen verhindert man, dass das Licht enteilen kann. Im einen Fall gravitativ, im anderen Fall dadurch, dass man dem Licht hinterhereilt. Betrachtet man den Vorgang des Hinterhereilenden Beobachters B' vom Standpunkt des ruhenden Beobachters B, so hat B' gegenüber dem Photon die Relativgeschwindigkeit $c - v_F$. Läßt man evtl. Raumkontraktionen außer Acht, so ergäbe sich ein Zeitdillatationsfaktor von $\alpha_{v_F} = \frac{c}{c - v_F} > \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_F^2}}$. Da aber aus Sicht von B das System B' in Bewegungsrichtung um den Faktor ...