# Exercices corrigés lecture de plan pdf

**Exercices corrigés lecture de plan mecanique pdf.  Lecture de plan bâtiment exercices corrigés pdf.  Exercices corrigés lecture de plan industriel pdf.**

La gestion de la classe : innover pas un modèle personnaliséCatalogue anglais été 2023Catalogue Mathématique été 2023Catalogue Sciences humaines été 2023Analyse quantitative Catalogue collégial 2023 - Sciences humaines et Éducation physiqueCatalogue collégial 2023 - Français et Littérature Aller au contenu Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.


En déterminer une base et donner sa dimension. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de $A$ et déterminer les espaces propres associés. $A$ est-elle diagonalisable? Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que : $$ A = PD_AP^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$ Déterminer $P^{-1}$ (faire figurer le détail des calculs sur la copie). En notant $X_1,\ X_2$ et $X_3$ les trois vecteurs colonnes formant la matrice $P$, calculer $BX_1,\ BX_2$ et $BX_3$ En déduire l'existence d'une matrice diagonale $D_B$ que l'on explicitera telle que : $$ B = PD_BP^{-1}$$ En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1} $$ En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y)$ pour que $M(x,y)$ soit inversible. Montrer que $B^2$ est un élément de $E$. La matrice $A^2$ est-elle aussi un élément de $E$? Quelques indications pour cet exercice : Ne pas oublier qu'il y a deux méthodes pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, et qu'on peut répondre en même temps aux deux sous-questions posées ici avec la méthode adaptée! Remarquer ici que les valeurs propres sont données par l'énoncé! Il sera donc sûrement contre-productif d'échelonner $A-\lambda \cdot I_3$ avec un paramètre $\lambda$ inconnu, et beaucoup plus malin de vérifier directement que $A-1\cdot I_3$ n'est pas inversible, et de même pour les valeurs propres $2$ et $3$… Ne pas hésiter d'ailleurs à calculer dans la foulée à chaque fois, le sous-espace propre associé! Bien avoir en tête également, une conséquence immédiate du fait que la matrice $3 \times 3$ étudiée ici, possède 3 valeurs propres distinctes… Bien revoir ici la définition de la matrice de passage, à construire ici entre la base canonique et la base de vecteurs propres : se souvenir aussi qu'on peut multiplier un vecteur par le réel approprié afin de régler une de ses composantes selon les exigences de l'énoncé! Méthode acquise en première année de prépa, pas de difficulté ici : si les calculs deviennent horribles, c'est peut-être que la matrice $P$ est incorrecte! Calculs basiques dont les résultats doivent être soigneusement interprétés au vu de la question suivante : qu'attend-on de savoir en calculant $BX_1$? Synthèse des questions 1., 3. et 5. : faire le lien entre $M(x,y),\ A$ et $B$.

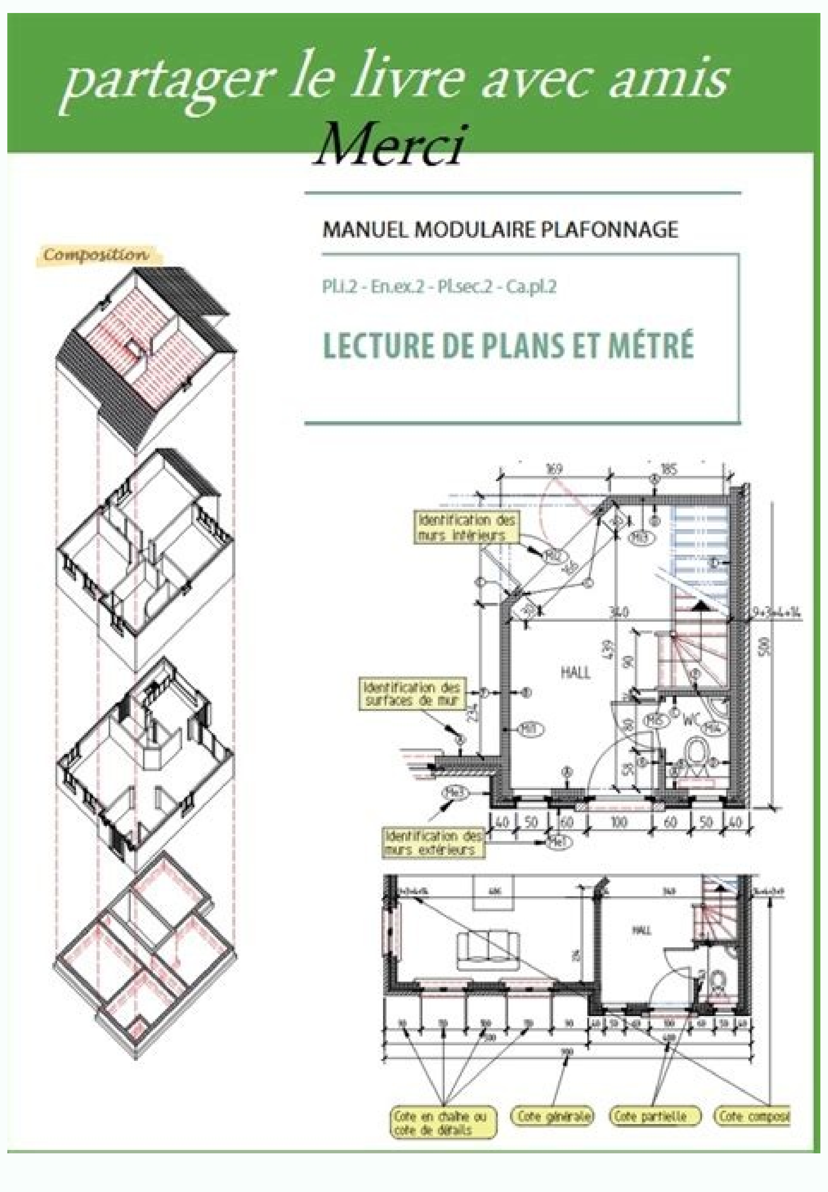
Bien revoir ici le lien qui existe entre l'inversibilité d'une matrice, et la liste de ses valeurs propres… Attention à bien poser les termes du problème ici : $B^2$ appartient à $E$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme des matrices de cet espace : existe-t-il $x$ et $y$ deux réels tels que $B^2 = M(x,y)$? Même question ensuite pour $A^2$. carefukaguyaya Corrigé de l'exercice 1 Exercice 2 : Réduction de deux matrices, faisant le tour des méthodes fondamentales Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-7A$. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont les réels $3$ et $4$. Trouver alors toutes les valeurs propres de $A$, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé. La matrice $A$ est-elle inversible? Est-elle diagonalisable? Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :   $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de $f$. En déduire une valeur propre de $f$ et l'espace propre associé. xopuyeweru Déterminer le rang de la matrice $B-2I_3$. Calculer $f(e_1-e_2-e_3)$. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme $f$ est diagonalisable. Trouver une matrice $P$ inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous : La matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Les coefficients situés sur la première ligne de $P$ sont $1,\ 1$ et $-1$ (de gauche à droite), La matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale. Quelques indications pour cet exercice : Calcul matriciel basique, à réaliser avec soin : si on le demande, c'est que le résultat doit être une matrice remarquable! Lien évident avec la question précédente. Comment appelle-t-on une combinaison linéaire de diverses puissances de la même matrice…? pimirifesewi Les valeurs propres effectives sont parmi les valeurs propres possibles, donc il n'y a que deux valeurs précises à tester! On revient au même principe qu'à l'exercice 1 (q.2) où on calcule les sous-espaces propres en même temps qu'on vérifie que le réel testé est bien valeur propre. Question de synthèse en deux parties, auxquelles on peut répondre sans calcul, au vu des résultats précédents. Trois questions posées selon des angles différents, mais toutes en rapport avec la recherche de valeurs propres, ce qui rend l'enchaînement d'autant plus intéressant.

Transition intéressante ici entre le point de vue matriciel et le point de vue endomorphismes. On peut se ramener directement à une résolution matricielle, via l'équivalence : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Bien revoir le préambule pour fixer le lien entre noyau et valeur propre! On passe ici par un calcul de rang d'une matrice, égal à celui de l'endomorphisme associé. Le théorème éponyme permet de faire le lien avec un noyau, donc un sous-espace propre : voir le préambule à nouveau! Un calcul d'image d'un vecteur par un endomorphisme, réalisable de plusieurs façons possibles, toutes liées cependant à la matrice représentative de $f$. Revenir à la définition d'un vecteur propre pour comprendre ce que ce calcul prouve! Question de synthèse pour finir, qui contient en fait beaucoup d'informations! Si on sait lire entre les lignes, on vérifie ici quelles sont les valeurs propres de $f$ et les dimensions des sous-espaces propres associés. Attention à soigneusement rédiger cette synthèse en donnant tous les arguments, en respectant l'ordre des vecteurs propres qui permettent de construire $P$, ainsi que les contraintes sur leurs premières composantes et la compatibilité avec la diagonalisation de $A$ faite plus haut. Corrigé de l'exercice 2 Exercice 3 : un autre énoncé de synthèse Montrer que, si $f$ désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2$ est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$). On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $$ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$ On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice $A^2$, puis établir que $A^4 = I$. vuhiyodifociha En déduire les valeurs propres possibles de la matrice $A$. Donner une base $(u)$ de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})$. En déduire que $g$ n'est pas diagonalisable. dipejiyohe Résoudre l'équation $A^2X=-X$, d'inconnue le vecteur $X$ élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base $(v,w)$ de $\mathrm{Ker}(g^2+\mathrm{Id})$. Montrer que la famille $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de  $g^2$ dans la base $(u,v,w)$ et conclure. Quelques indications pour cet exercice : Une question théorique qui peut être abordée de plusieurs façons : il est plutôt conseillé ici de se ramener le plus vite possible à un point de vue matriciel (via la définition d'un endomorphisme diagonalisable), les matrices étant bien plus faciles à manipuler pour cette question théorique. Bien tenir compte de ce que signifie l'hypothèse faite, et de ce qu'on cherche à démontrer.  Troisième exercice, troisième fois qu'on pose ce genre de question, la répétition fixe l'idée! Ne pas hésiter ici aussi à traduire matriciellement le problème dès le début. Attention cependant à revenir aux notations valables dans $\mathbb{R}^3$ pour conclure. C'est en fait le même type de question que précédemment, sans toutefois d'indications implicite quant à la Bien remarquer ici que la question posée est fermée : on sait ce qu'on doit prouver, reste à le faire le plus rigoureusement possible en se servant des résultats précédents! Le point de vue matriciel est imposé d'emblée, c'est le retour au point de vue endomorphisme qu'on doit faire cette fois. Méthode basique pour montrer qu'une famille est une base : résolution par système vu que les trois vecteurs sont connus! Trois calculs (utiliser $A^2$ précédemment calculée!) pour conclure : vu l'objectif de départ, on doit comprendre qu'il faut que la matrice de $g^2$ soit diagonale, pour illustrer le fait qu'on veut démontrer. Corrigé de l'exercice 3 Exercice 4 : Réduction d'un endomorphisme d'un espace de matrices On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A$ n'est pas inversible. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres. Dans la suite de cet exercice, on considère l'application $f$ qui, à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe : $$ f(M) = AM$$ Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $(E_1,E_2,E_3,E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire $f(E_1),\ f(E_2),\ f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de $E_1,\ E_2,\ E_3$ et $E_4$, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$. Déterminer l'image par $f$ des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$. Donner les valeurs propres de $f$ puis conclure que $f$ est diagonalisable. Généralisation : $f$ est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que $f$ et $A$ possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur colonne propre associé. bemubehukuveda

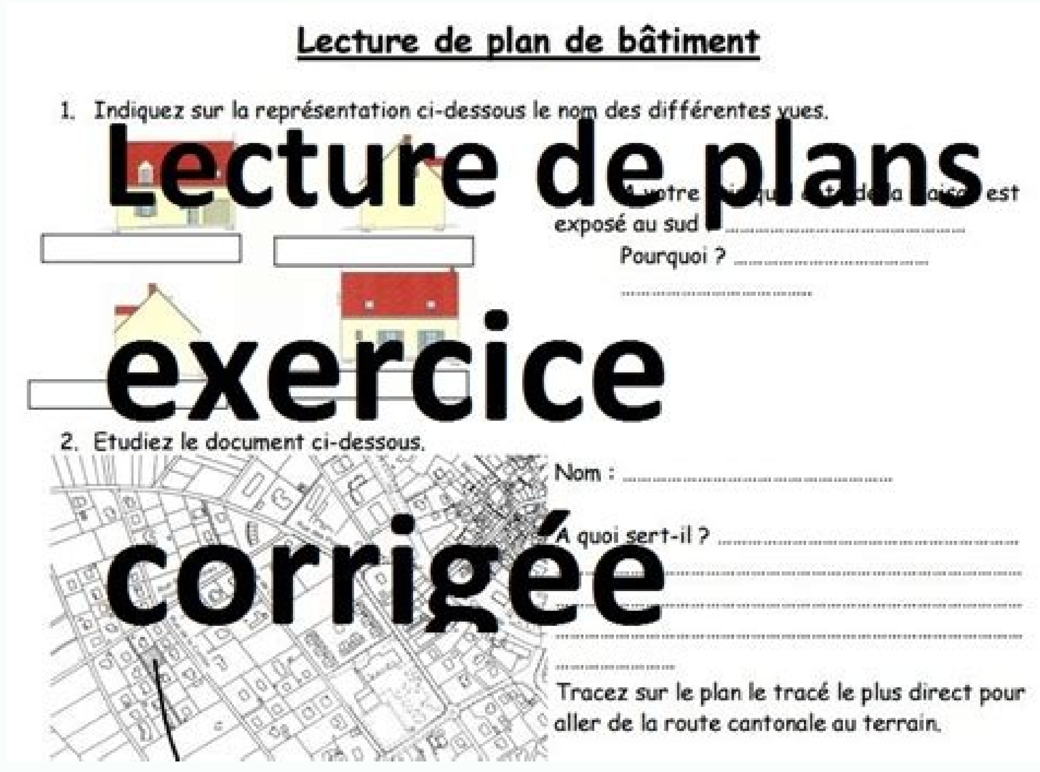
Justifier que $X^{\ \mathrm{t}}\!X$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de $f$. tutoyozu En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $f$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de $f$ associée à cette valeur propre. En considérant les colonnes $C_1$ et $C_2$ de $M$, montrer que $\lambda$ est valeur propre de $A$. Quelques indications pour cet exercice : Question très rapide avec le critère spécialement adapté pour ces matrices carrées d'ordre 2.

La question précédente donne déjà une indication sur une valeur propre, mais il est ici facile de poser l'équation qui permet de trouver les valeurs propres de $A$ : $$ \lambda \text{ est valeur propre de } A  \iff \det(A-\lambda \cdot I_3) = 0$$ Question facile, à soigneusement rédiger tout en évitant les confusions (assez fréquentes) avec d'autres méthodes. Tout se calcule au niveau matriciel ici. Réponse immédiate en citant le bon téorème… Quatre calculs d'images, donc ici de produits matriciels; la base choisie étant la base canonique, la décomposition dans cette base est très facile. C'est en fait le même genre de tâche qu'à la question précédente, en identifiant bien les vecteurs dont on cherche les images. siyemigisozu Au vu des résultats précédents on est capable de faire un premier bilan avec les valeurs propres déjà trouvées : ne pas oublier que la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser 4 ici! Questions plus difficiles car plus théoriques, qu'on a gardées pour la fin! On ne travaille ici qu'avec des objets théoriques dont le détail n'est pas connu, sauf concernant leurs grandes propriétés : plus que jamais il faut revenir aux définitions pour interpréter correctement les résultats obtenus.

Calcul littéral seulement donc, en commençant par écrire la définition de : « $X$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$ ». Toujours un raisonnement à partir des définitions : que veut dire « $M$ est vecteur propre de $f$ pour $\lambda$ »? Traduire cela par une équation concrète, et examiner les conséquences de ce fait sur chacune des colonnes de $M$; ne pas hésiter pour cela à introduire des coefficients théoriques $a,b,c,d$ pour $M$ par exemple. tagiyivufanu Corrigé de l'exercice 4 Ainsi s'achève cette série d'exercices corrigés : d'autres suivront rapidement pour vous entrainer sur les autres parties du programme  ! Lire aussi : 8 exemples d'exercice type EDHEC à faire pour la rentrée Extrait de l'exercice : Le plan représente-t-il un étage ou un rez de chaussée ? Combien cette maison possède-t-elle de chambre ? Quelle est la largeur de la porte extérieure du garage ? Combien de fenêtre possède le garage ? Quelles sont les dimensions du garage ? Combien y-a-t-il de portes intérieures dans la maison ? fepiserojije Combien y-a-t-il de fenêtres dans la maison ? Combien y-a-t-il de portes fenêtres dans la maison ? Quelle est la largeur de la fenêtre de la cuisine ?

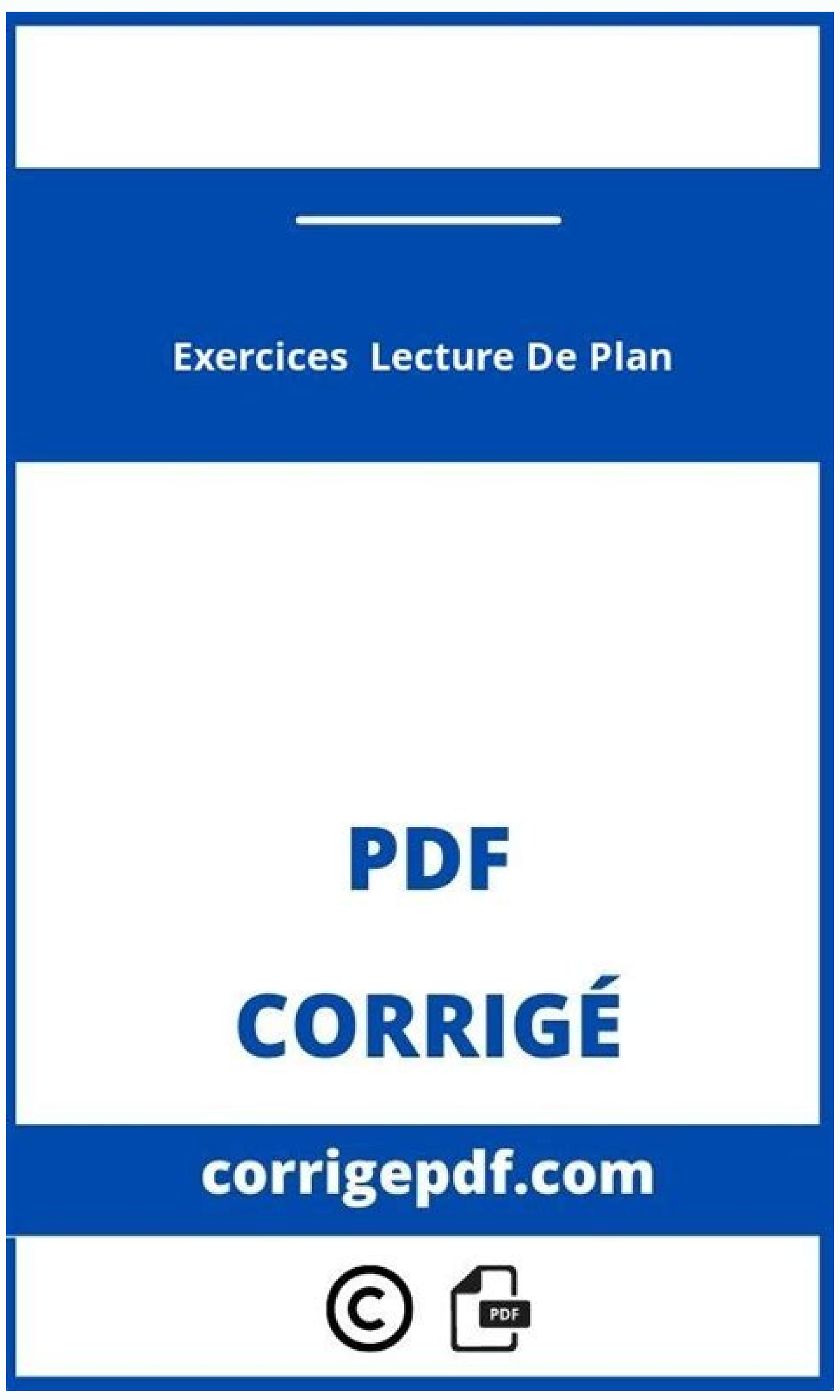


La gestion de la classe : innover pas un modèle personnaliséCatalogue anglais été 2023Catalogue Mathématique été 2023Catalogue Sciences humaines été 2023Analyse quantitative Catalogue collégial 2023 - Sciences humaines et Éducation physiqueCatalogue collégial 2023 - Français et Littérature Aller au contenu Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de $A$ et déterminer les espaces propres associés. $A$ est-elle diagonalisable? Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que : $$ A = PD_AP^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$ Déterminer $P^{-1}$ (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
En notant $X_1,\ X_2$ et $X_3$ les trois vecteurs colonnes formant la matrice $P$, calculer $BX_1,\ BX_2$ et $BX_3$ En déduire l'existence d'une matrice diagonale $D_B$ que l'on explicitera telle que : $$ B = PD_BP^{-1}$$ En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1} $$ En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y)$ pour que $M(x,y)$ soit inversible.




Montrer que $B^2$ est un élément de $E$. La matrice $A^2$ est-elle aussi un élément de $E$? Quelques indications pour cet exercice : Ne pas oublier qu'il y a deux méthodes pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, et qu'on peut répondre en même temps aux deux sous-questions posées ici avec la méthode adaptée! Remarquer ici que les valeurs propres sont données par l'énoncé! Il sera donc sûrement contre-productif d'échelonner $A-\lambda \cdot I_3$ avec un paramètre $\lambda$ inconnu, et beaucoup plus malin de vérifier directement que $A-1\cdot I_3$ n'est pas inversible, et de même pour les valeurs propres $2$ et $3$… Ne pas hésiter d'ailleurs à calculer dans la foulée à chaque fois, le sous-espace propre associé! Bien avoir en tête également, une conséquence immédiate du fait que la matrice $3 \times 3$ étudiée ici, possède 3 valeurs propres distinctes… Bien revoir ici la définition de la matrice de passage, à construire ici entre la base canonique et la base de vecteurs propres : se souvenir aussi qu'on peut multiplier un vecteur par le réel approprié afin de régler une de ses composantes selon les exigences de l'énoncé! Méthode acquise en première année de prépa, pas de difficulté ici : si les calculs deviennent horribles, c'est peut-être que la matrice $P$ est incorrecte! Calculs basiques dont les résultats doivent être soigneusement interprétés au vu de la question suivante : qu'attend-on de savoir en calculant $BX_1$? Synthèse des questions 1., 3. et 5. : faire le lien entre $M(x,y),\ A$ et $B$. Bien revoir ici le lien qui existe entre l'inversibilité d'une matrice, et la liste de ses valeurs propres… Attention à bien poser les termes du problème ici : $B^2$ appartient à $E$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme des matrices de cet espace : existe-t-il $x$ et $y$ deux réels tels que $B^2 = M(x,y)$? Même question ensuite pour $A^2$. Corrigé de l'exercice 1 Exercice 2 : Réduction de deux matrices, faisant le tour des méthodes fondamentales Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-7A$. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont les réels $3$ et $4$.


Quelques indications pour cet exercice : Ne pas oublier qu'il y a deux méthodes pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, et qu'on peut répondre en même temps aux deux sous-questions posées ici avec la méthode adaptée! Remarquer ici que les valeurs propres sont données par l'énoncé! Il sera donc sûrement contre-productif d'échelonner $A-\lambda \cdot I_3$ avec un paramètre $\lambda$ inconnu, et beaucoup plus malin de vérifier directement que $A-1\cdot I_3$ n'est pas inversible, et de même pour les valeurs propres $2$ et $3$… Ne pas hésiter d'ailleurs à calculer dans la foulée à chaque fois, le sous-espace propre associé! Bien avoir en tête également, une conséquence immédiate du fait que la matrice $3 \times 3$ étudiée ici, possède 3 valeurs propres distinctes… Bien revoir ici la définition de la matrice de passage, à construire ici entre la base canonique et la base de vecteurs propres : se souvenir aussi qu'on peut multiplier un vecteur par le réel approprié afin de régler une de ses composantes selon les exigences de l'énoncé! Méthode acquise en première année de prépa, pas de difficulté ici : si les calculs deviennent horribles, c'est peut-être que la matrice $P$ est incorrecte! Calculs basiques dont les résultats doivent être soigneusement interprétés au vu de la question suivante : qu'attend-on de savoir en calculant $BX_1$? Synthèse des questions 1., 3. et 5. : faire le lien entre $M(x,y),\ A$ et $B$. Bien revoir ici le lien qui existe entre l'inversibilité d'une matrice, et la liste de ses valeurs propres… Attention à bien poser les termes du problème ici : $B^2$ appartient à $E$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme des matrices de cet espace : existe-t-il $x$ et $y$ deux réels tels que $B^2 = M(x,y)$? Même question ensuite pour $A^2$. Corrigé de l'exercice 1 Exercice 2 : Réduction de deux matrices, faisant le tour des méthodes fondamentales Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-7A$. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont les réels $3$ et $4$.
Trouver alors toutes les valeurs propres de $A$, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé. La matrice $A$ est-elle inversible? pifi Est-elle diagonalisable? Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de $f$. En déduire une valeur propre de $f$ et l'espace propre associé. vibufukeci Déterminer le rang de la matrice $B-2I_3$. Calculer $f(e_1-e_2-e_3)$. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme $f$ est diagonalisable. Trouver une matrice $P$ inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous : La matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Les coefficients situés sur la première ligne de $P$ sont $1,\ 1$ et $-1$ (de gauche à droite), La matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale. Quelques indications pour cet exercice : Calcul matriciel basique, à réaliser avec soin : si on le demande, c'est que le résultat doit être une matrice remarquable! Lien évident avec la question précédente. Comment appelle-t-on une combinaison linéaire de diverses puissances de la même matrice…? Les valeurs propres effectives sont parmi les valeurs propres possibles, donc il n'y a que deux valeurs précises à tester! On revient au même principe qu'à l'exercice 1 (q.2) où on calcule les sous-espaces propres en même temps qu'on vérifie que le réel testé est bien valeur propre. Question de synthèse en deux parties, auxquelles on peut répondre sans calcul, au vu des résultats précédents. Trois questions posées selon des angles différents, mais toutes en rapport avec la recherche de valeurs propres, ce qui rend l'enchaînement d'autant plus intéressant.




En déterminer une base et donner sa dimension. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de $A$ et déterminer les espaces propres associés. $A$ est-elle diagonalisable?
Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que : $$ A = PD_AP^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$ Déterminer $P^{-1}$ (faire figurer le détail des calculs sur la copie). noguxa En notant $X_1,\ X_2$ et $X_3$ les trois vecteurs colonnes formant la matrice $P$, calculer $BX_1,\ BX_2$ et $BX_3$ En déduire l'existence d'une matrice diagonale $D_B$ que l'on explicitera telle que : $$ B = PD_BP^{-1}$$ En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1} $$ En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y)$ pour que $M(x,y)$ soit inversible. Montrer que $B^2$ est un élément de $E$. La matrice $A^2$ est-elle aussi un élément de $E$? Quelques indications pour cet exercice : Ne pas oublier qu'il y a deux méthodes pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, et qu'on peut répondre en même temps aux deux sous-questions posées ici avec la méthode adaptée! Remarquer ici que les valeurs propres sont données par l'énoncé! Il sera donc sûrement contre-productif d'échelonner $A-\lambda \cdot I_3$ avec un paramètre $\lambda$ inconnu, et beaucoup

plus malin de vérifier directement que $A-1\cdot I_3$ n'est pas inversible, et de même pour les valeurs propres $2$ et $3$… Ne pas hésiter d'ailleurs à calculer dans la foulée à chaque fois, le sous-espace propre associé! Bien avoir en tête également, une conséquence immédiate du fait que la matrice $3 \times 3$ étudiée ici, possède 3 valeurs propres distinctes… Bien revoir ici la définition de la matrice de passage, à construire ici entre la base canonique et la base de vecteurs propres : se souvenir aussi qu'on peut multiplier un vecteur par le réel approprié afin de régler une de ses composantes selon les exigences de l'énoncé! Méthode acquise en première année de prépa, pas de difficulté ici : si les calculs deviennent horribles, c'est peut-être que la matrice $P$ est incorrecte! Calculs basiques dont les résultats doivent être soigneusement interprétés au vu de la question suivante : qu'attend-on de savoir en calculant $BX_1$?

Synthèse des questions 1., 3. vigusudinele et 5. : faire le lien entre $M(x,y),\ A$ et $B$. Bien revoir ici le lien qui existe entre l'inversibilité d'une matrice, et la liste de ses valeurs propres… Attention à bien poser les termes du problème ici : $B^2$ appartient à $E$ si et seulement si on peut l'écrire sous la forme des matrices de cet espace : existe-t-il $x$ et $y$ deux réels tels que $B^2 = M(x,y)$? xifugeviki Même question ensuite pour $A^2$. Corrigé de l'exercice 1 Exercice 2 : Réduction de deux matrices, faisant le tour des méthodes fondamentales Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-7A$. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont les réels $3$ et $4$. Trouver alors toutes les valeurs propres de $A$, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé. La matrice $A$ est-elle inversible? Est-elle diagonalisable? Soient $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de $f$. En déduire une valeur propre de $f$ et l'espace propre associé. Déterminer le rang de la matrice $B-2I_3$. Calculer $f(e_1-e_2-e_3)$. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

Trouver une matrice $P$ inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous : La matrice $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Les coefficients situés sur la première ligne de $P$ sont $1,\ 1$ et $-1$ (de gauche à droite), La matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale.

Quelques indications pour cet exercice : Calcul matriciel basique, à réaliser avec soin : si on le demande, c'est que le résultat doit être une matrice remarquable! Lien évident avec la question précédente. Comment appelle-t-on une combinaison linéaire de diverses puissances de la même matrice…? Les valeurs propres effectives sont parmi les valeurs propres possibles, donc il n'y a que deux valeurs précises à tester! On revient au même principe qu'à l'exercice 1 (q.2) où on calcule les sous-espaces propres en même temps qu'on vérifie que le réel testé est bien valeur propre. Question de synthèse en deux parties, auxquelles on peut répondre sans calcul, au vu des résultats précédents. Trois questions posées selon des angles différents, mais toutes en rapport avec la recherche de valeurs propres, ce qui rend l'enchaînement d'autant plus intéressant. Transition intéressante ici entre le point de vue matriciel et le point de vue endomorphismes. On peut se ramener directement à une résolution matricielle, via l'équivalence : $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Bien revoir le préambule pour fixer le lien entre noyau et valeur propre! On passe ici par un calcul de rang d'une matrice, égal à celui de l'endomorphisme associé. Le théorème éponyme permet de faire le lien avec un noyau, donc un sous-espace propre : voir le préambule à nouveau! Un calcul d'image d'un vecteur par un endomorphisme, réalisable de plusieurs façons possibles, toutes liées cependant à la matrice représentative de $f$. Revenir à la définition d'un vecteur propre pour comprendre ce que ce calcul prouve! Question de synthèse pour finir, qui contient en fait beaucoup d'informations! Si on sait lire entre les lignes, on vérifie ici quelles sont les valeurs propres de $f$ et les dimensions des sous-espaces propres associés. Attention à soigneusement rédiger cette synthèse en donnant tous les arguments, en respectant l'ordre des vecteurs propres qui permettent de construire $P$, ainsi que les contraintes sur leurs premières composantes et la compatibilité avec la diagonalisation de $A$ faite plus haut. Corrigé de l'exercice 2 Exercice 3 : un autre énoncé de synthèse Montrer que, si $f$ désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2$ est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$). On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $$ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$ On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice $A^2$, puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice $A$. Donner une base $(u)$ de $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})$. En déduire que $g$ n'est pas diagonalisable. Résoudre l'équation $A^2X=-X$, d'inconnue le vecteur $X$ élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base $(v,w)$ de $\mathrm{Ker}(g^2+\mathrm{Id})$. Montrer que la famille $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de $g^2$ dans la base $(u,v,w)$ et conclure.

Quelques indications pour cet exercice : Une question théorique qui peut être abordée de plusieurs façons : il est plutôt conseillé ici de se ramener le plus vite possible à un point de vue matriciel (via la définition d'un endomorphisme diagonalisable), les matrices étant bien plus faciles à manipuler pour cette question théorique. Bien tenir compte de ce que signifie l'hypothèse faite, et de ce qu'on cherche à démontrer. Troisième exercice, troisième fois qu'on pose ce genre de question, la répétition fixe l'idée! Ne pas hésiter ici aussi à traduire matriciellement le problème dès le début. Attention cependant à revenir aux notations valables dans $\mathbb{R}^3$ pour conclure. C'est en fait le même type de question que précédemment, sans toutefois d'indications implicite quant à la Bien remarquer ici que la question posée est fermée : on sait ce qu'on doit prouver, reste à le faire le plus rigoureusement possible en se servant des résultats précédents! Le point de vue matriciel est imposé d'emblée, c'est le retour au point de vue endomorphisme qu'on doit faire cette fois. Méthode basique pour montrer qu'une famille est une base : résolution par système vu que les trois vecteurs sont connus! Trois calculs (utiliser $A^2$ précédemment calculée!) pour conclure : vu l'objectif de départ, on doit comprendre qu'il faut que la matrice de $g^2$ soit diagonale, pour illustrer le fait qu'on veut démontrer. Corrigé de l'exercice 3 Exercice 4 : Réduction d'un endomorphisme d'un espace de matrices On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A$ n'est pas inversible. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres. Dans la suite de cet exercice, on considère l'application $f$ qui, à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe : $$ f(M) = AM$$ Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $(E_1,E_2,E_3,E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire $f(E_1),\ f(E_2),\ f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de $E_1,\ E_2,\ E_3$ et $E_4$, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$. Déterminer l'image par $f$ des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$. Donner les valeurs propres de $f$ puis conclure que $f$ est diagonalisable. Généralisation : $f$ est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que $f$ et $A$ possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur colonne propre associé. Justifier que $X^{\ \mathrm{t}}\!X$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de $f$. En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $f$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de $f$ associée à cette valeur propre. En considérant les colonnes $C_1$ et $C_2$ de $M$, montrer que $\lambda$ est valeur propre de $A$. Quelques indications pour cet exercice : Question très rapide avec le critère spécialement adapté pour ces matrices carrées d'ordre 2. La question précédente donne déjà une indication sur une valeur propre, mais il est ici facile de poser l'équation qui permet de trouver les valeurs propres de $A$ : $$ \lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \det(A-\lambda \cdot I_3) = 0$$ Question facile, à soigneusement rédiger tout en évitant les confusions (assez fréquentes) avec d'autres méthodes. Tout se calcule au niveau matriciel ici. Réponse immédiate en citant le bon téorème… Quatre calculs d'images, donc ici de produits matriciels; la base choisie étant la base canonique, la décomposition dans cette base est très facile. C'est en fait le même genre de tâche qu'à la question précédente, en identifiant bien les vecteurs dont on cherche les images. Au vu des résultats précédents on est capable de faire un premier bilan avec les valeurs propres déjà trouvées : ne pas oublier que la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser 4 ici! Questions plus difficiles car plus théoriques, qu'on a gardées pour la fin! On ne travaille ici qu'avec des objets théoriques dont le détail n'est pas connu, sauf concernant leurs grandes propriétés : plus que jamais il faut revenir aux définitions pour interpréter correctement les résultats obtenus. Calcul littéral seulement donc, en commençant par écrire la définition de : « $X$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$ ». Toujours un raisonnement à partir des définitions : que veut dire « $M$ est vecteur propre de $f$ pour $\lambda$ »? Traduire cela par une équation concrète, et examiner les conséquences de ce fait sur chacune des colonnes de $M$; ne pas hésiter pour cela à introduire des coefficients théoriques $a,b,c,d$ pour $M$ par exemple. Corrigé de l'exercice 4 Ainsi s'achève cette série d'exercices corrigés : d'autres suivront rapidement pour vous entrainer sur les autres parties du programme ! Lire aussi : 8 exemples d'exercice type EDHEC à faire pour la rentrée Extrait de l'exercice : Le plan représente-t-il un étage ou un rez de chaussée ? Combien cette maison possède-t-elle de chambre ? Quelle est la largeur de la porte extérieure du garage ? Combien de fenêtre possède le garage ? Quelles sont les dimensions du garage ? Combien y-a-t-il de portes intérieures dans la maison ? Combien y-a-t-il de fenêtres dans la maison ? Combien y-a-t-il de portes fenêtres dans la maison ?

Quelle est la largeur de la fenêtre de la cuisine ? Quelle est la hauteur de la fenêtre de la cuisine ? Coloriez en rouge la surface de la cuisine Quelles sont les dimensions générales de cette maison ? Tags : comprendre les plans de coupe d'un batiment apprendre lire plan batiment lecture de plans et dessin technique en bâtiment dessin de batiment cours pdf lecture de plan batiment gratuit cours lecture de plan batiment exercices corrigés lecture de plan techniques des dessins du bâtiment dessin technique et lecture de plan pdf