9. Topologie des espaces vectoriels normés - Exercices

Du crabe gelé

E et F désignent des espaces vectoriels normés. Sauf mention explicite, les normes de ces deux espaces seront notées indifféremment $\|.\|$ et les distances associées d.

Parties ouvertes, parties fermées, topologies relatives

E-9.1. (*5'*)* Soient F et G deux fermés disjoints de E.
(a) Construire une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ valant 0 sur F et 1 sur G.
(b) En déduire qu'il existe U et V, ouverts disjoints de E, tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.2. (*10'*)** Montrer que tout ouvert U de E est la réunion d'une suite de fermés.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.3. (*15'*)** On note E l'ensemble des suites bornées de réels, muni de la norme $\|.\|_\infty$, F le sous-espace de E constitué des suites convergentes, et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, G_a le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers a.
(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $(u^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. On suppose que la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge dans E, et on note $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa limite. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{p\to+\infty} u_n^{(p)} = v_n.$$

(b) Montrer que G_a est un fermé relatif de F pour tout $a \in \mathbb{R}$.
(c) Montrer que F est un fermé de E. On pourra utiliser la notion de suite de Cauchy, introduite dans le TD 1.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.4. (*15'*)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
(b) En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.5. (*15'*)*** Déterminer une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle l'ensemble des polynômes unitaires est fermé.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.6. (*15'*)*** *Semi-continuité inférieure du rang.* Soient $(r,n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $r \leqslant \min(n,p)$. Soit $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.
(a) Soit $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un voisinage de R dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitué de matrices de rang supérieur ou égal à r.
(b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On en déduit que l'application rang est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir TD).

Énoncé détaillé – Corrigé

Adhérence, intérieur, frontière, densité

E-9.7. (*5'*)* Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.
(a) Comparer $\overline{A \times B}$ et $\overline{A} \times \overline{B}$.
(b) Faire de même pour les intérieurs.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.8. (*5'*)* A-t-on $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$ pour toute partie A d'un espace vectoriel normé ?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.9. (*10'*)* Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $S_A = \{PAP^{-1}, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$ sa classe de similitude. Montrer que $\overline{S_A} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.10. (*5'*)* Soit $f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$. Peut-on affirmer que $f^{-1}(\{0\})$ est la frontière de $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.11. (*5'*)* Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Peut-on affirmer que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$?

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.12. (*10'*)** (a) Existe-t-il une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient distinctes ? Même question pour A, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.
(b) Montrer que pour tout $A \subset E$, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ et $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.13. (*15'*)** Soient A et B deux parties de E. Comparer $\overline{A+B}$ et $\overline{A}+\overline{B}$, et de même pour les intérieurs. On exhibera des contre-exemples pour les inclusions qui ne sont pas vérifiées en général.

Énoncé détaillé – Corrigé

E-9.14. *(15')*** Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.
(a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.
(i) f est continue sur E.
(ii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.
(iii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}\left(\overline{B}\right) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.
(b) On suppose f continue sur E. A-t-on $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$? $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.15. *(10')*** Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.
(a) Montrer que f est continue sur E si et seulement si pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(b) Soient $f \in \mathscr{C}(E, F)$ et $A \subset E$. Comparer $f\left(\overset{\circ}{A}\right)$ et $\overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.16. *(20')*** *Autour des comatrices (suite).* Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\tilde{A}, \tilde{B})$ les transposées de leurs comatrices respectives. *Certains résultats se réfèrent à un exercice de la feuille de réduction, qu'il est souhaitable d'aborder auparavant.*
(a) Montrer que $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ le sont également.
(b) Montrer que $\tilde{A}$ est un polynôme en A.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.17. *(20')*** *Propriétés topologiques des matrices cycliques.* Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *cyclique* si et seulement s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(A^k X)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme une famille libre. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices cycliques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
(a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
(b) Montrer que si A est à valeurs propres deux à deux distinctes, alors elle est cyclique. En déduire que $\mathscr{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.18. *(20')**** Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la frontière de $\mathscr{D}_n$, puis son intérieur.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.19. *(25')**** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$S_A = \{P^{-1}AP, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

la classe de similitude de A. On note encore $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
(a) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathscr{N}$.
(b) Montrer que $A \in \mathscr{N} \iff 0 \in \overline{S_A}$.
(c) Montrer que A est scalaire si et seulement si S_A est bornée.
(d) Montrer que S_A est connexe par arcs.
Un exercice « étoilé » de votre TD démontre encore que A est diagonalisable si et seulement si S_A est fermée.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.20. *(20')**** *Théorème de Baire (cet exercice utilise les suites de Cauchy, voir le chapitre « espaces vectoriels normés »).* Soient E un espace vectoriel normé *complet* (voir TD 1) et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E denses dans E. Le but est de montrer que $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est encore une partie dense de E.
(a) Soit V un ouvert de E. En contruisant une suite décroissante de boules fermées dont les rayons sont strictement positifs et tendent vers 0, montrer que $U \cap \Omega \neq \emptyset$. Conclure.
(b) Montrer que si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieur vide dans E, alors $\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide.
(c) *Application* : montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

Parties compactes

E-9.21. *(10')** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$. On munit E d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ et de la norme $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k \mapsto \|x\| = \sum_{k=1}^{d} |x_k|$, et on munit $\mathscr{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||.|||$ associée à $\|.\|$. On considère $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}(E)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n(x) = v(x)$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n = v$ au sens de $|||.|||$, et en déduire que cette convergence a lieu pour toute norme sur $\mathscr{L}(E)$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.22. (*10'*)* Soient A et B deux compacts de E. On pose

$$\delta(A,B) = \sup_{x\in A} \mathrm{d}(x,B)$$

et

$$\mathrm{d}(A,B) = \max(\delta(A,B),\delta(B,A)).$$

(a) Que peut-on dire de d ?
(b) Peut-on étendre ce résultat à toutes les parties de E ?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.23. (*10'*)** *Applications coercives.* Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $f \in \mathscr{C}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.
(i) L'image réciproque par f de tout compact de F est un compact de E.
(ii) $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.24. (*15'*)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$. Soit $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.
(i) K est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
(ii) K est un fermé relatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $M \in K$, $\|M\| \leqslant a$ et $|\det(M)| \geqslant b$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.25. (*10'*)** Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E.
(a) Montrer que $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de E.
(b) Montrer que si U est un ouvert de E qui contient K, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.26. (*15'*)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et K un compact de E d'intérieur non vide. Montrer que $M = \{u \in \mathscr{L}(E), u(K) \subset K\}$ est un compact de $\mathscr{L}(E)$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.27. (*20'*)** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
(a) Montrer que si N est une norme sur E, alors $K = \overline{B}(0,1)$ vérifie les propriétés suivantes.
(i) K est compact. (ii) $0 \in \overset{\circ}{K}$. (iii) K est convexe. (iv) Pour tout $x \in K$, $-x \in K$.
(b) Réciproquement, si K vérifie les propriétés ci-dessus, montrer qu'il existe une norme sur E dont K est la boule unité fermée.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.28. (*10'*)** Soit K un convexe compact d'un espace vectoriel normé. Montrer que K est l'enveloppe convexe de sa frontière.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.29. (*15'*)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite a. Montrer que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.30. (*15'*)** Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et K un compact de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\sigma(K)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres de tous les éléments de K. Montrer que $\sigma(K)$ est compact.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.31. (*15'*)** *Théorème de Riesz.* Le but est de montrer que si $\overline{B}(0,1)$ est une partie compacte de E, alors E est de dimension finie. On raisonne pour cela par contraposée, en supposant E de dimension infinie.
(a) Soit F de dimension finie un sous-espace vectoriel de E. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $p(x) \in F$ tel que $\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,p(x))$.
(b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\mathrm{d}(x,F) \geqslant 1$.
(c) Montrer que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.32. (*15'*)*** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E dont le diamètre tend vers 0.
(a) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
(b) Peut-on recouvrir $\mathbb{R}^2$ par une union disjointe de cercles de rayon non nul ?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.33. (*20'*)*** Montrer que l'adhérence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$ est égale à l'ensemble des matrices à valeurs propres dans $\mathbb{U}$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.34. (*20'*)*** Soient K un compact de E et $f : K \to K$ telle que pour tout $(x, y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$ (remarquez que f n'est pas supposée continue).

(a) Soit $x \in E$ et $u \in K^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

(b) Montrer que pour tout $(x, y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

(c) En déduire que f est continue, bijective de K dans K et de réciproque continue.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.35. (*25'*)*** *Propriété de Borel-Lebesgue sur* $[0, 1]$.

(a) Soient A un ensemble non vide et $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fermés relatifs de $[0, 1]$ telle que $\bigcap_{\alpha\in B} F_\alpha \neq \emptyset$ pour toute partie finie $B \subset A$. Montrer que $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$. On pourra raisonner par dichotomie.

(b) Avec les mêmes notations, montrer que si $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'ouverts relatifs de $[0, 1]$ telle $\bigcup_{\alpha\in A} \Omega_\alpha = [0, 1]$, alors il existe une partie finie $B \subset A$ telle que $\bigcup_{\alpha\in B} \Omega_\alpha = [0, 1]$.

(c) *Application* : soit I un idéal de l'anneau $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, différent de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$ pour tout $f \in I$.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.36. (*30'*)*** *Parties précompactes (cet exercice utilise les suites de Cauchy et la complétude, voir TD 1).* Soit A une partie de E. On dit que A est *précompact* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in A^n$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

(a) Montrer que si toute suite de A possède une suite extraite qui soit de Cauchy, alors A est une partie précompacte de E.

(b) On suppose que A est précompact : soit u une suite de points de A. En recouvrant successivement A par des familles finies de boules de rayon de plus en plus petit, montrer que u possède une sous-suite qui est de Cauchy.

(c) Montrer que A est une partie compacte de E si et seulement si elle est complète et précompacte.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.37. (*20'*)*** Soit $f \in \mathscr{C}(E, E)$. On suppose E de dimension fnie. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence a. Montrer que u est convergente.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

Parties connexes par arcs, théorème des valeurs intermédiaires

E-9.38. (*5'*)* Existe-t-il une injection continue de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.39. (*10'*)* Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. En considérant $\Delta = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$, retrouver le fait qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective sur I est strictement monotone.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.40. (*5'*)** Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties connexes par arcs de E. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est-elle connexe par arcs ?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.41. (*10'*)** Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas compact.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.42. (*15'*)** *Partie connexe non connexe par arcs, adhérence d'une partie connexe par arcs.* Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Soient A une partie connexe par arcs de E, et $f : A \to \{0, 1\}$ une application continue. Montrer que f est constante.

(b) On suppose dans la suite que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose

$$A_1 = \left\{(x, y) \in]0, 1] \times \mathbb{R}, y = \sin\frac{1}{x}\right\}.$$

Représenter sommairement A_1, montrer qu'il est connexe par arcs. Montrer que son adhérence A est connexe, c'est-à-dire que toute application continue $f : A \to \{0, 1\}$ est constante, mais que A n'est pas connexe par arcs.

Énoncé détaillé – **Corrigé**

E-9.43. (*25'*)*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose que pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f([a, b])$ est un segment. f est-elle nécessairement continue ?

(b) On suppose que pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f([a, b])$ est un intervalle fermé, et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est un fermé de $\mathbb{R}$. f est-elle nécessairement continue ?

Énoncé détaillé – **Corrigé**

9. Topologie des espaces vectoriels normés - Exercices (énoncés détaillés)

E et F désignent des espaces vectoriels normés. Sauf mention explicite, les normes de ces deux espaces seront notées indifféremment $\|.\|$ et les distances associées d.

Parties ouvertes, parties fermées, topologies relatives

E-9.1. (*5'*)* Soient F et G deux fermés disjoints de E. En considérant l'application $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{d}(x,F)}{\mathrm{d}(x,F)+\mathrm{d}(x,G)}$, montrer qu'il existe U et V, ouverts disjoints de E, tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.2. (*10'*)** Soient U un ouvert de E, et $F_n = \left\{x \in E, \mathrm{d}(x, U^c) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés dont la réunion est égale à U.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.3. (*15'*)** On note E l'ensemble des suites bornées de réels, muni de la norme $\|.\|_\infty$, F le sous-espace de E constitué des suites convergentes, et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, G_a le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers a.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $(u^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. On suppose que la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge dans E, et on note $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa limite. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n : u \mapsto u_n$ est continue sur E, et en déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} u_n^{(p)} = v_n.$$

(b) Montrer que l'application φ, définie sur F et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\varphi : u \mapsto \lim u$ est continue sur F. En déduire que G_a est un fermé relatif de F pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(c) Cette question utilise la notion de suite de Cauchy, introduite dans le TD 1. Soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $v \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\ell_p = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(p)}.$$

Montrer que $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, puis que F est un fermé de E.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.4. (*15'*)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$. On poura exploiter le fait que $|Z| \geqslant |\mathrm{Im}(Z)|$ pour tout $Z \in \mathbb{C}$. Démontrer la réciproque.

(b) Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.5. (*15'*)*** Montrer que $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle l'ensemble des polynômes unitaires est fermé.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.6. (*15'*)*** *Semi-continuité inférieure du rang.* Soient $(r,n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $r \leqslant \min(n,p)$. Soit $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.

(a) Montrer qu'il existe un voisinage de $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitué de matrices de rang supérieur ou égal à r (on pourra utiliser le résultat sur les matrices à diagonale dominante, voir le TD 7). Étendre ce résultat à toute matrice $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On en déduit que l'application rang est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir TD).

Énoncé non détaillé – Corrigé

Adhérence, intérieur, frontière, densité

E-9.7. (*5'*)* Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

(a) Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(b) Faire de même pour les intérieurs.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.8. (*5'*)* Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) \subsetneq \mathrm{Fr}(A)$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.9. (*10'*)* Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $S_A = \{PAP^{-1}, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$ sa classe de similitude. Montrer, par caractérisation séquentielle et à l'aide du polynôme caractéristique, que $\overline{S_A} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.10. (*5'*)* Déterminer une application $f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ n'est pas la frontière de $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.11. (*5'*)* Montrer par caractérisation séquentielle que pour tout $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.12. (*10'*)** (a) Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$ soient distinctes. Même question pour A, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

(b) Montrer que pour tout $A \subset E$, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ et $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$. On exploitera préférentiellement les propriétés de plus grand ouvert contenu et de plus petit fermé contenant.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.13. (*15'*)** Soient A et B deux parties de E.

(a) Montrer que $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$, et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général.

(a) Montrer que $\mathring{A} + \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A+B}}$, et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.14. (*15'*)** Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.

(a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i) f est continue sur E.

(ii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.

(iii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}\left(\overline{B}\right) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.

On prouvera directement que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et (i) $\Longleftrightarrow$ (iii), en utilisant la caractérisation de la continuité par images réciproques pour les implications droite-gauche.

(b) Montrer par des contre-exemples qu'on peut trouver des applications f et g continues sur E vérifiant $f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \neq \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$ et $g^{-1}\left(\overline{B}\right) \neq \overline{g^{-1}(B)}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.15. (*10'*)** Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés.

(a) Montrer que si f est continue sur E, alors pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (on pourra raisonner par caractérisation séquentielle). Démontrer ensuite la réciproque de ce résultat par contraposée.

(b) Soient $f \in \mathscr{C}(E,F)$ et $A \subset E$. Montrer qu'il n'y a aucune inclusion générale entre $f\left(\mathring{A}\right)$ et $\overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$, dans un sens comme dans l'autre.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.16. (*20'*)** *Autour des comatrices (suite).* Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\tilde{A},\tilde{B})$ les transposées de leurs comatrices respectives. *Certains résultats se réfèrent à un exercice de la feuille de réduction, qu'il est souhaitable d'aborder auparavant.*

(a) Montrer que $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$. On pourra commencer par le cas où A et B sont inversibles. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ le sont également.

(b) Montrer que $\tilde{A}$ est un polynôme en A que l'on explicitera à l'aide du polynôme caractéristique de A.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.17. (*20'*)** *Propriétés topologiques des matrices cycliques.* Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *cyclique* si et seulement s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(A^k X)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme une famille libre. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices cycliques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra considérer $\varphi_X : A \mapsto \det((A^k X)_{0 \leqslant k \leqslant n-1})$ pour $X \in \mathbb{C}^n$ fixé.

(b) Montrer que si A est à valeurs propres deux à deux distinctes, alors elle est cyclique. On pourra construire un vecteur X à partir d'une base de vecteurs propres de A. En déduire que $\mathscr{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.18. (*20'*)*** Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la frontière de $\mathscr{D}_n$ est l'ensemble des matrices ayant une valeur propre multiple. En déduire l'intérieur de $\mathscr{D}_n$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.19. (*25'*)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$S_A = \{P^{-1}AP, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

la classe de similitude de A. On note encore $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\overline{\mathscr{N}} = \mathscr{N}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{N}} = \emptyset$.

(b) Montrer que $A \in \mathscr{N} \iff 0 \in \overline{S_A}$. On pourra exploiter le « lemme très utile » vu en TD.

(c) Montrer que A est scalaire si et seulement si S_A est bornée. On pourra raisonner par contraposée pour la réciproque, en adaptant de nouveau le « lemme très utile ».

(d) Montrer que S_A est connexe par arcs. On pourra se ramener à la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

L'exercice « étoilé » de votre TD démontrant le « lemme très utile » donne aussi que A est diagonalisable si et seulement si S_A est fermée.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.20. (*20'*)*** *Théorème de Baire (cet exercice utilise les suites de Cauchy, voir le chapitre « espaces vectoriels normés »).* Soient E un espace vectoriel normé *complet* (voir TD 1) et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E denses dans E. Le but est de montrer que $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore une partie dense de E.

(a) Soit V un ouvert de E. Justifier qu'il existe $x_0 \in V \cap U_0$ et $r_0 \in]0,1[$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset V \cap U_0$, puis contruire une suite décroissante de boules fermées $(\overline{B}(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $r_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V \cap \bigcap_{\ell=0}^{n} U_\ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $V \cap \Omega \neq \emptyset$ et conclure.

(b) Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieur vide dans E, alors $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide.

(c) *Application* : montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'est complet pour aucune norme. On pourra l'écrire comme une réunion de fermés d'intérieur vide.

Énoncé non détaillé – Corrigé

Parties compactes

E-9.21. (*10'*)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$. On munit E d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$ et de la norme $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k \mapsto \|x\| = \sum_{k=1}^{d} |x_k|$, et on munit $\mathscr{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||.|||$ associée à $\|.\|$. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}(E)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = v(x)$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \overline{B}(0_E, 1)$ tel que

$$|||v_n - v||| = \|(v_n - v)(x_n)\|.$$

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ au sens de $|||.|||$, et en déduire que cette convergence a lieu pour toute norme sur $\mathscr{L}(E)$.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.22. (*10'*)* Soient A et B deux compacts de E. On pose

$$\delta(A, B) = \sup_{x\in A} \mathrm{d}(x, B)$$

et

$$\mathrm{d}(A, B) = \max(\delta(A, B), \delta(B, A)).$$

(a) Montrer que d est bien définie et est une distance sur l'ensemble des compacts de E.

(b) Montrer que d n'est pas définie, en général, sur l'ensemble de toutes les parties de E.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.23. (*10'*)** *Applications coercives.* Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $f \in \mathscr{C}(E, F)$. On souhaite montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.

(i) L'image réciproque par f de tout compact de F est un compact de E.

(ii) $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

(a) Montrer (i)⇒(ii) en considérant $K = f^{-1}(\overline{B}(0, A))$ pour tout $A > 0$.

(b) Montrer (ii)⇒(i) par contraposée.

Énoncé non détaillé – Corrigé

E-9.24. (*15'*)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$. Soit $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.

(i) K est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) K est un fermé relatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $M \in K$, $\|M\| \leqslant a$ et $|\det(M)| \geqslant b$.

(a) Montrer (i)$\Rightarrow$(ii) en revenant aux définitions.

(b) Montrer (ii)$\Rightarrow$(i) en montrant séquentiellement que K est fermé.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.25. (*10'*)** Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E.

(a) Montrer que $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact de E. En considérant $x_n \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $K \neq \emptyset$.

(b) Montrer par l'absurde (et par un raisonnement similaire) que si U est un ouvert de E qui contient K, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.26. (*15'*)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, K un compact de E d'intérieur non vide, et $M = \{u \in \mathscr{L}(E), u(K) \subset K\}$.

(a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ converge vers u, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ pour tout $x \in K$. En déduire que M est un fermé de $\mathscr{L}(E)$.

(b) Montrer que $M = \{u \in \mathscr{L}(E), u(K) \subset K\}$ est un compact de $\mathscr{L}(E)$. On pourra majorer $\|u(x)\|$ pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$ indépendamment de x, en exploitant le fait que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.27. (*20'*)** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

(a) Montrer que si N est une norme sur E, alors $K = \overline{B}(0,1)$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) K est compact. (ii) $0 \in \overset{\circ}{K}$. (iii) K est convexe. (iv) Pour tout $x \in K$, $-x \in K$.

(b) Réciproquement, si K vérifie les propriétés ci-dessus, montrer que $N : x \mapsto \inf\{\lambda > 0, \lambda^{-1}x \in K\}$ est une norme sur E, dont K est la boule unité fermée.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.28. (*10'*)** Soit K un convexe compact d'un espace vectoriel normé. Montrer que K est l'enveloppe convexe de sa frontière. On pourra, pour $x \in K$, considérer une droite affine D passant par x.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.29. (*15'*)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite a. Montrer que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E. On pourra considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K et distinguer selon qu'elle prend des valeurs correspondant à un nombre fini ou non d'indices de la suite u.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.30. (*15'*)** Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et K un compact de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\sigma(K)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres de tous les éléments de K.

(a) Montrer que si $M \in K$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors il existe un vecteur X unitaire tel que $MX = \lambda X$.

(b) Montrer par l'absurde que $\sigma(K)$ est borné.

(c) Montrer que $\sigma(K)$ est compact.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.31. (*15'*)** *Théorème de Riesz.* Le but est de montrer que si $\overline{B}(0,1)$ est une partie compacte de E, alors E est de dimension finie. On raisonne pour cela par contraposée, en supposant E de dimension infinie.

(a) Soit F de dimension finie un sous-espace vectoriel de E. En exploitant le fait que F est fermé (pourquoi ?), montrer que pour tout $x \in E$, il existe $p(x) \in F$ tel que $\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,p(x))$.

(b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\mathrm{d}(x,F) \geqslant 1$. On considérera $y \in E \setminus F$ et on construira x à l'aide de y et $p(y)$.

(c) Montrer que $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte en construisant une suite d'éléments de $\overline{B}(0,1)$ à distance mutuelle supérieure ou égale à 1.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.32. (*15'*)*** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E dont le diamètre tend vers 0.

(a) Montrer que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente. En déduire que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

(b) Montrer qu'on ne peut pas recouvrir $\mathbb{R}^2$ par une union disjointe de cercles de rayon non nul.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.33. (*20'*)*** On note $A=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\exists p\in\mathbb{N}^*,M^p=I_n\}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, $\mathbb{U}_p$ l'ensemble des racines p-èmes de l'unité pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, et $\mathbb{U}_\infty=\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_p$.

(a) Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est dense dans $\mathbb{U}$, puis que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres dans $\mathbb{U}$ est dense dans l'ensemble C de toutes les matrices à valeurs propres dans $\mathbb{U}$.

(b) Montrer que C est fermé, et en déduire $\overline{A}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.34. (*20'*)*** Soit K un compact de E et $f:K\to K$ telle que pour tout $(x,y)\in K^2$, $\|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|$ (remarquez que f n'est pas supposée continue).

(a) Soit $x\in E$ et $u\in K^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0=x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que pour toute extractrice $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge, $u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$.

(b) Montrer que pour tout $(x,y)\in K^2$, $\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$. On pourra considérer deux suites u et v de premiers termes respectifs x et y.

(c) En déduire que f est continue, bijective de K dans K et de réciproque continue. On pourra, pour la surjectivité, réexploiter les idées précédentes.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.35. (*25'*)*** *Propriété de Borel-Lebesgue sur* $[0,1]$.

(a) Soient A un ensemble non vide et $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fermés relatifs de $[0,1]$ telle que $\bigcap_{\alpha\in B}F_\alpha\neq\varnothing$ pour toute partie finie $B\subset A$. On note $I(B)=\bigcap_{\alpha\in B}F_\alpha$ pour toute partie B de A. Montrer qu'il n'existe pas deux parties finies B et C de A telles que $G=I(B)\cap\left[0,\frac{1}{2}\right]=\varnothing$ et $H=I(C)\cap\left[\frac{1}{2},1\right]=\varnothing$. En déduire qu'on peut choisir $K_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ou $\left[\frac{1}{2},1\right]$ tel que $I(B)\cap K_1\neq\varnothing$ pour toute partie finie B de A. Montrer alors que $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha\neq\varnothing$ par dichotomie.

(b) Avec les mêmes notations, montrer que si $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'ouverts relatifs de $[0,1]$ telle $\bigcup_{\alpha\in A}\Omega_\alpha=[0,1]$, alors il existe une partie finie $B\subset A$ telle que $\bigcup_{\alpha\in B}\Omega_\alpha=[0,1]$.

(c) *Application* : soit I un idéal de l'anneau $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, différent de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que pour toute partie finie B de I, il existe $x_B\in[0,1]$ tel que $f(x_B)=0$ pour tout $f\in B$. En déduire qu'il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=0$ pour tout $f\in I$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.36. (*30'*)*** *Parties précompactes (cet exercice utilise les suites de Cauchy et la complétude, voir TD 1).* Soit A une partie de E. On dit que A est *précompact* si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in A^n$ tels que $A\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon)$.

(a) Montrer par contraposée que si toute suite de A possède une suite extraite qui soit de Cauchy, alors A est une partie précompacte de E.

(b) On suppose que A est précompact : soit u une suite de points de A. En recouvrant successivement A par des familles finies de boules de rayon de plus en plus petit, et en utilisant un *procédé diagonal* (voir TD), montrer que u possède une sous-suite qui est de Cauchy.

(c) Montrer que A est une partie compacte de E si et seulement si elle est complète et précompacte.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.37. (*20'*)*** Soit $f\in\mathscr{C}(E,E)$. On suppose E de dimension fnie. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ par $u_0\in E$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence a.

(a) On suppose que u n'est pas bornée. Montrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans $A=f(\overline{B}(a,1))\setminus B(a,1)$.

(b) Montrer que u est convergente.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

Parties connexes par arcs, théorème des valeurs intermédiaires

E-9.38. (*5'*)* Montrer qu'il n'existe aucune injection continue de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.39. (*10'*)* Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. En considérant $\Delta=\{(x,y)\in I^2,x<y\}$ et $\varphi:(x,y)\mapsto f(x)-f(y)$, retrouver le fait qu'une application $f:I\to\mathbb{R}$ continue et injective sur I est strictement monotone.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.40. (*5'*)** Montrer que l'intersection d'une suite décroissante $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties connexes par arcs de E n'est pas nécessairement connexe par arcs. On pourra « s'arranger pour que la partie qui établisse la liaison disparaisse à l'infini »... Ce n'est pas clair ??

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.41. (*10'*)** Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas compact. On pourra exploiter le fait que l'espace $\mathbb{R}^n$ privé d'une boule reste connexe par arcs.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.42. (*15'*)** *Partie connexe non connexe par arcs, adhérence d'une partie connexe par arcs.* Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Soient A une partie connexe par arcs de E, et $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. Montrer que f est constante.

(b) On suppose dans la suite que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $A = A_1 \cup \{(0,y), y \in [-1,1]\}$ où

$$A_1 = \left\{(x,y) \in]0,1] \times \mathbb{R}, y = \sin \frac{1}{x}\right\}.$$

Représenter sommairement A_1, et montrer qu'il est connexe par arcs. Montrer que $\overline{A_1} = A$, et que toute application continue $f : A \to \{0,1\}$ est constante (A est *connexe*). Montrer que A n'est pas connexe par arcs.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

E-9.43. (*25'*)*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose que pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f([a,b])$ est un segment. Montrer par un contre-exemple que f n'est pas nécessairement continue.

(b) On suppose que pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f([a,b])$ est un intervalle fermé, et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. On pourra, pour $x \in [a,b]$, considérer les $f([x-2^{-n}, x+2^{-n}])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé non détaillé – **Corrigé**

9. Topologie des espaces vectoriels normés - Exercices (corrigés)

Parties ouvertes, parties fermées, topologies relatives

E-9.1. Pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x,F)+\mathrm{d}(x,G)=0 \iff \mathrm{d}(x,F)=\mathrm{d}(x,G)=0$. Comme F et G sont fermés, ceci est encore équivalent à $x \in F \cap G$, ce qui est exclu. On en déduit que $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{d}(x,F)}{\mathrm{d}(x,F)+\mathrm{d}(x,G)}$ est continue sur E comme quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $f(F)=\{0\}$ et $f(G)=\{1\}$. $U = f^{-1}(]-\infty,1/2[)$ et $V = f^{-1}(]1/2,+\infty[)$ sont alors deux ouverts (comme images réciproques d'ouverts par f) disjoints contenant respectivement F et G.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.2. Le résultat est évident si U est vide ou égal à E. Dans le cas contraire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = \left\{x \in E, \mathrm{d}(x,U^{\mathrm{c}}) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$.

∗ F_n est fermé comme image réciproque du fermé $\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[$ par l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x,U^{\mathrm{c}})$ qui est continue.

∗ $F_n \subset U$ puisque si $x \in F_n$, alors $x \notin U^{\mathrm{c}}$ c'est-à-dire $x \in U$. On a donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset U$.

∗ Réciproquement, si $x \in U$, alors il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset U$. On en déduit que $\mathrm{d}(x,U) \geqslant r$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, on a alors $x \in F_n$. Ceci montre que $U \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, puis l'égalité, ce qui conclut.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.3. (a) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geqslant p_0 \Rightarrow \|u^{(p)} - v\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p \geqslant p_0 \Rightarrow |u_n^{(p)} - v_n| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve bien que $(u_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers v_n.

Autre méthode. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$t_n : u \mapsto u_n$$

est linéaire sur E et continue car

$$|t_n(u)| = |u_n| \leqslant \|u\|_\infty$$

pour tout $u \in E$ (caractérisation des applications linéaires continues). On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} = u_n^{(p)} = \lim_{p\to+\infty} t_n(u^{(p)}) = t_n(\ell) = \ell_n$$

ce qu'on voulait.

(b) φ est linéaire par propriétés des limites et pour tout $u \in \mathscr{E}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par continuité de la valeur absolue, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right| \leqslant \|u\|_\infty$$

c'est-à-dire $|\varphi(u)| \leqslant \|u\|_\infty$ et donc φ est continue. Il en résulte que $G_a = \varphi^{-1}(\{a\})$ est un fermé de E pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $v \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\ell_p = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(p)}.$$

∗ Comme la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $p_0>0$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$q \geqslant p \geqslant p_0 \Rightarrow \|u^{(q)} - u^{(p)}\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Il vient que pour tout $q \geqslant p \geqslant p_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n^{(q)} - u_n^{(p)}| \leqslant \varepsilon$$

et donc $|\ell_q - \ell_p| \leqslant \varepsilon$ en faisant tendre n vers l'infini, ce qui montre que $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy et donc convergente. On note ℓ sa limite. Soit $\varepsilon>0$.

∗ En reprenant le même p_0 que ci-dessus, on a pour $q \geqslant p \geqslant p_0$

$$\|u^{(q)} - u^{(p)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

et donc $\|v - u^{(p)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ en faisant tendre q vers $+\infty$.

∗ Comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0 \geqslant p_0$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |\ell_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

$*$ Comme $\lim_{n\to+\infty} u_{n_0}^{(n)} = \ell_{n_0}$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_{n_0}^{(n)} - \ell_{n_0}| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors pour $n \geqslant n_1$

$$|v_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n^{(n_0)}| + |u_n^{(n_0)} - \ell_{n_0}| + |\ell_{n_0} - \ell| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui montre

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

et donc $v \in F$. F est donc bien fermé dans E.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.4. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Supposons que $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. P est scindé sur $\mathbb{C}$ en tant que polynôme non constant. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ racine de P, on a

$$0 = |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$$

d'où $\mathrm{Im}(z) = 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$. Toutes les racines de P sont donc réelles et P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Supposons réciproquement P scindé sur $\mathbb{R}$: comme il est unitaire, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

si bien que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{n} |z - a_k|.$$

Or, pour tout $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| \geqslant |\mathrm{Im}(Z)|$ de sorte que

$$|P(z)| \geqslant \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z - a_k)| = \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|^n$$

comme voulu.

(b) Soit S l'ensemble des polynômes de degré n, unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$. On note $d : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ le coefficient de X^n de P. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_z : P \mapsto (|P(z)| - |\mathrm{Im}(z)|^n, d(P))$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ car ses deux coordonnées le sont : d l'est car elle est linéaire, et l'application linéaire $P \mapsto P(z)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{C}$ est continue car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc sa composée avec le module et la translation par la constante $-|\mathrm{Im}(z)|^n$ l'est aussi. D'après la question précédente

$$S = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \varphi_z^{-1}([0, +\infty[\times \{1\})$$

est fermé comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. L'ensemble des matrices carrées réelles trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est alors fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car égal à $\chi^{-1}(S)$ où $\chi : M \mapsto \chi_M$ est continue car les coefficients de χ_M sont des polynômes selon les coefficients de M.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.5. On définit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes unitaires convergente, en notant Q sa limite. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$$

avec $d_n = \deg(P_n)$ et $(a_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant d_n} \in \mathbb{R}^{d_n+1}$, et

$$Q = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k$$

avec $r = \deg Q$. Supposons que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers r : il existe alors une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\deg(P_{\varphi(n)}) \neq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors, comme P_n est unitaire et que $b_r \neq 0$

$$\|P_n - Q\| = \begin{cases} 1 \text{ si } \deg(P_{\varphi(n)}) > r \\ |b_r| 1 \text{ si } \deg(P_{\varphi(n)}) < r \end{cases}$$

si bien que $\|P_n - Q\|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

On en déduit que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r, donc est stationnaire à r à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Le coefficient dominant de P_n est alors $a_{n,r} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$|a_{n,r} - b_r| = |1 - b_r| \leqslant \|P_n - Q\|$$

si bien que $b_r = 1$ et Q est donc unitaire. L'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ est bien fermé pour $\|.\|$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.6. (a) Le résultat est évident pour $r=0$, et on suppsose donc $r\geqslant 1$. Il existe $(P,Q)\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $R=PJQ$ avec $J=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r}\end{pmatrix}$. On munit $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de sa norme ∞ canonique.

Pour toute matrice définie par blocs $M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec le même découpage, si on suppose que tous les coefficients de M sont strictement inférieurs à $\dfrac{1}{2r}$ en valeur absolue, alors

$$M=\begin{pmatrix} I_r+A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

et I_r+A est à diagonale dominante (voir TD 7) donc inversible. On en déduit que $\operatorname{rg} M\geqslant r$ (si ses r premières colonnes de M étaient liées, on aurait une relation de liaison non triviale entre les colonnes de I_r+A). Il existe donc un voisinage $\mathscr{V}$ de J constitué de matrices de rang supérieur ou égal à r, et $P\mathscr{V}Q$ est un voisinage de M répondant à la question.

(b) D'après la question précédente, l'ensemble des matrices de rang strictement supérieur à r, donc de rang supérieur ou égal à $r+1$, est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si bien que son complémentaire est fermé.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

Adhérence, intérieur, frontière, densité

E-9.7. (a) Comme $\overline{A}\times\overline{B}$ est fermé comme produit de fermés, et que $A\times B\subset\overline{A}\times\overline{B}$, on a $\overline{A\times B}\subset\overline{A}\times\overline{B}$. Réciproquement, si $(a,b)\in\overline{A}\times\overline{B}$, il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et B respectivement qui convergent vers a et b : la suite $(a_n,b_n)\in(A\times B)^{\mathbb{N}}$ converge vers (a,b) qui est donc dans $\overline{A\times B}$ ce qui donne l'inclusion réciproque.

(b) On a de même $\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}$ ouvert inclus dans $A\times B$ donc dans $\overset{\circ}{\widehat{A\times B}}$. Réciproquement, si $(a,b)\in\overset{\circ}{\widehat{A\times B}}$, il existe $r>0$ tel que la boule ouverte de centre (a,b) et de rayon r soit incluse dans $A\times B$. Celle-ci est (par définition de la norme d'un espace produit) le produit de la boule de E de centre a et de rayon r et de la boule de F de centre b et de rayon r, si bien que $a\in\overset{\circ}{A}$ et $b\in\overset{\circ}{B}$ et donc l'inclusion réciproque.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.8. Non : pour $A=]0,1[\cap\mathbb{Q}$, on a

$$\operatorname{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=[0,1]\cap\mathbb{R}=[0,1]$$

si bien que

$$\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(A))=\{0,1\}\neq\operatorname{Fr}(A).$$

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.9. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de S_A et B sa limite. L'application $M\mapsto\chi_M$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_n[X]$, et comme $\chi_{B_n}=\chi_A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\chi_B=\lim\limits_{n\to+\infty}\chi_{B_n}=\chi_A$. 0 n'est donc pas valeur propre de B, d'où $B\in GL_n(K)$, et $\overline{S_A}\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.10. Soit $f:x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } \|x\|\leqslant 1\\ \|x\|-1 \text{ si } \|x\|>1\end{cases}$. f est continue sur E comme composée de $\varphi:t\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } t\in[0,1]\\ t-1 \text{ si } t\geqslant 1\end{cases}$ et de la norme, mais $f^{-1}(\{0\})=\overline{B}(0,1)$ n'est pas la frontière de $f^{-1}(\mathbb{R}_+)=E$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.11. On a $B(a,r)\subset\overline{B}(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ fermée donc $\overline{B(a,r)}\subset\overline{B}(a,r)$. Réciproquement, si $x\in\overline{B}(a,r)$, on pose $x_n=a+(x-a)(1-2^{-n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, de sorte que $\lim\limits_{n_to+\infty}x_n=x$ et $\|x_n-a\|=\|x_n-a\|(1-2^{-n})<\|x_n-a\|\leqslant r$ donc $x_n\in B(a,r)$. On en déduit que $x\in\overline{B(a,r)}$ comme voulu.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.12. (a) $A=[-1,1]\setminus\{0\}$ donne bien quatre objets différents : $\overset{\circ}{A}=]-1,1[\setminus\{0\}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}=[-1,1]$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}=]-1,1[$. Son complémentaire $B=]-\infty,-1[\cup\{0\}\cup]1,+\infty[$ donne un contre-exemple dans le second cas : $\overline{B}=]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty[$, $\overset{\circ}{\overline{B}}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. $C=(]0,1[\cap\mathbb{Q})\cup\{2\}$ également : $\overline{C}=[0,1]\cup\{2\}$, $\overset{\circ}{\overline{C}}=]0,1[$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{C}}}=[0,1]$.

(b) $\overset{\circ}{A}\subset\overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{A}$ est ouvert donc $\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$. De même, $\overset{\circ}{A}\subset\overline{A}$ et $\overline{A}$ est fermé donc $\overline{\overset{\circ}{A}}\subset\overline{A}$, puis $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}\subset\overset{\circ}{\overline{A}}$ par croissance de l'intérieur. L'autre égalité s'obtient par passage au complémentaire.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.13. On a $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$: en effet, pour tout $x\in\overline{A}+\overline{B}$, il existe $(a,b)\in\overline{A}\times\overline{B}$ tel que $x=a+b$, puis $(u,v)\in A^{\mathbb{N}}\times B^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$, $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}b$, de sorte que $x=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)\in\overline{A+B}$. L'inclusion réciproque est fausse en général :

prendre $A = \mathbb{N}^*$, $B = \{-k + \frac{1}{k}, k \geqslant 2\}$ (voir TD).

On a directement $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset A + B$ et $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$ est ouvert (c'est vrai en général de $X + \Omega$ avec Ω ouvert et X quelconque, voir TD), de sorte que $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A+B}}$. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui est tel que $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} = \emptyset$ et $\overset{\circ}{\overline{A+B}} = \mathbb{R}$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.14. (a) (i)⇒(ii) : $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est ouvert et inclus dans $f^{-1}(B)$, donc dans son intérieur. (ii)⇒(i) : si f vérifie (ii) mais n'est pas continue, il existe $B \in F$ ouvert tel que $f^{-1}(B)$ n'est pas ouvert, donc $\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}} \subsetneq f^{-1}(B) = f^{-1}(\overset{\circ}{B})$, ce qui est absurde.

(i)⇒(iii) : $f^{-1}(\overline{B})$ est un fermé contenant $f^{-1}(B)$ donc son adhérence. (iii)⇒(i) : si f vérifie (iii) mais n'est pas continue, il existe $B \in F$ fermé tel que $f^{-1}(B)$ n'est pas fermé, donc $f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \subsetneq \overline{f^{-1}(B)}$, absurde.

(b) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante égale à 1 et $B = \{1\}$, on a $f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}} = \mathbb{R}$.

Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle et $B =]0, +\infty[$, on a $\overline{g^{-1}(B)} = \emptyset$ tandis que $g^{-1}(\overline{B}) = \mathbb{R}$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.15. ⇒ : soit $y \in f(\overline{A})$, il existe donc $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$, puis $u \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. On a alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \in f(A)^{\mathbb{N}}$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \in \overline{f(A)}$ par continuité de f en x, d'où $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

⇐ : on raisonne par contraposée. Si f n'est pas continue, il existe $x \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction φ telle que $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $A = \{x_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$, on a $\overline{A} = A \cup \{x\}$ et $\mathrm{d}(f(x), f(A)) \geqslant \varepsilon$ donc $f(x) \notin \overline{f(A)}$ d'où $f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)}$.

(a) Il n'y a aucune inclusion en général entre $_{w}ideprenf(A)$ et $f\left(\overset{\circ}{A}\right)$.

* Pour $f = 1$ et $A = \mathbb{R}$, on a $\overset{\circ}{f(A)} = \emptyset$ et $f(\overset{\circ}{A}) = \{1\}$.

* Pour f continue, affine sur $\mathbb{R}_-$, $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$, vérifiant $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, $f(1) = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x \geqslant 2$, et pour $A =]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \{2\}$, on a $\overset{\circ}{f(A)} =]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $f(\overset{\circ}{A}) =]0,1[$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.16. (a) Si A et B sont inversibles, on a directement

$$\widetilde{AB} = \frac{1}{\det(AB)}(AB)^{-1} = \frac{B^{-1}A^{-1}}{\det(B)\det(A)} = \tilde{B}\tilde{A}.$$

L'application $(A,B) \mapsto \widetilde{AB} - \tilde{B}\tilde{A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ car ses coordonnées sont des polynômes en les coefficients de A et B, et nulle sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$, donc nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$: l'égalité $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ est donc vraie pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors d'une part

$$\widetilde{P^{-1}}\tilde{P} = \widetilde{PP^{-1}} = \tilde{I_n} = I_n$$

donc $\tilde{P}$ est inversible d'inverse $\widetilde{P^{-1}}$, et d'autre part

$$\tilde{A} = \widetilde{PBP^{-1}} = \widetilde{P^{-1}}\tilde{B}\tilde{P} = \tilde{P}^{-1}\tilde{B}\tilde{P}$$

d'où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.

(b) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A, de décomposition $\chi_A = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ sur la base canonique de $K_n[X]$. Si A est inversible, alors

$$\tilde{A} = \det(A)A^{-1} = (-1)^n a_0 A^{-1}.$$

Comme $\chi_A(A) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, et que $a_0 \neq 0$ puisque $0 \notin \mathrm{Sp}\,A$, on a

$$A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = 0 \iff A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} + a_0 A^{-1} = 0$$

ce qui donne

$$\tilde{A} = (-1)^{n+1}\left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}\right) = P_A(A)$$

où $P_A = (-1)^{n+1}\dfrac{\chi_A - \chi_A(0)}{X} \in \mathbb{C}[X]$.

Dans le cas général, l'application $A \mapsto \chi_A$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car les coefficients de χ_A sont polynomiaux en A, puis $A \mapsto \tilde{A} - P_A(A)$ également, et elle est nulle sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ entier, de sorte que la relation $\tilde{A} = P_A(A)$ est vraie en toute généralité.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.17. (a) Pour $X \in \mathbb{C}^n$, on pose $\varphi_X : A \mapsto \det((A^k X)_{0\leqslant k\leqslant n-1})$: il vient

$$\mathscr{C} = \bigcup_{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})} \varphi_X^{-1}(\mathbb{C}^*)$$

qui est ouvert comme réunion d'images réciproques d'ouverts par des applications continues.

(b) A est diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples). Soit $\mathscr{B} = (E_1, \dots, E_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A, respectivement associés à des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distinctes. On pose alors $X = \sum_{k=1}^{n} E_k$. La matrice de la famille $(A^k X)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est une matrice de Vandermonde associée à des sclaires deux à deux distincts, donc de déterminant non nul, si bien que $(A^k X)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est encore une base de $\mathbb{C}^n$. A est donc cyclique.

En reprenant le raisonnement vu dans le TD pour démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on constate en fait qu'on y démontre plus précisément que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense. Comme l'ensemble des matrices cycliques le contient, il est également dense. *Remarque : en réexploitant directement les idées de cet exercice (en particulier la matrice de Vandermonde), on démontre plus précisément qu'une matrice cyclique est diagonalisable si et seulement si elle est à valeurs propres deux à deux distinctes.*

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.18. La frontière de $\mathscr{D}_n$ est l'ensemble des matrices ayant une valeur propre multiple. D'une part, $\mathscr{D}_n$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (voir TD) donc M ayant une valeur propre multiple est dans $\overline{\mathscr{D}_n}$. D'autre part, quitte à changer l'ordre des colonnes de P, on a $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, D triangulaire supérieure et $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Si $\mu \neq 0$, A n'est pas diagonalisable, donc T non plus (considérer un polynôme annulateur), puis M. Si $\mu = 0$, remplacer A par $A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: on a donc dans tous les cas $M \in \overline{\mathscr{D}_n{}^{\mathrm{c}}}$, et donc $M \in \mathrm{Fr}(D_n)$.

Réciproquement, si $M \in \mathrm{Fr}\, D_n$, elle est limite d'une suite de matrices $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ non diagonalisables : ces matrices ont une valeur propre double λ_p. Quitte à extraire (la suite des matrices est bornée donc les suites de valeurs propres aussi), on peut considérer que λ_p converge, et $\chi_{M_p}(\lambda_p) = \chi'_{M_p}(\lambda_p) = 0$ donc M a aussi une valeur propre multiple par passage à la limite.

$\overset{\circ}{\mathscr{D}_n}$ est donc l'ensemble des matrices à valeurs propres simples.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.19. (a) On sait que $\mathscr{N} = f^{-1}(\{0\})$ où $f : M \mapsto M^n$ donc $\mathscr{N}$ est fermé, si bien que $\overline{\mathscr{N}} = \mathscr{N}$.

Soit $M \in \mathscr{N}$: il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T$ soit triangulaire supérieure stricte. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme matricielle $\|.\|$ quelconque, et de sa base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\|P\|\,\|P^{-1}\|\,\|E_{1,1}\|}$, alors $T' = T + \dfrac{\varepsilon'}{2} E_{1,1}$ n'est pas nilpotente puisque $\dfrac{\varepsilon'}{2} \in \mathrm{Sp}(T')$, et

$$\|M - P^{-1}T'P\| = \frac{\varepsilon'}{2}\|P^{-1}E_{1,1}P\| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\|P\|\,\|P^{-1}\|\,\|E_{1,1}\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On en déduit que $B(M, \varepsilon) \cap \mathscr{N}^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$, et donc qu'aucune boule ouverte autour de M n'est incluse dans $\mathscr{N}$. Finalement, $\overset{\circ}{\mathscr{N}} = \emptyset$.

(b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $0 \in \overline{S_A}$: soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices semblables à A qui converge vers 0. L'application

$$M \mapsto \chi_M$$

est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ puisque les coefficients de χ_M sont des polynômes selon les coefficients de M. En outre, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p \in S_A$ donc $\chi_{A_p} = \chi_A$ et par passage à la limite quand p tend vers l'infini, A a le même polynôme caractéristique que la matrice nulle, donc X^n. On en déduit par le théorème de Cayley-Hamilton que $A^n = 0$ et donc A est nilpotente.

Réciproquement, soit A une matrice nilpotente, et soit $T = \left(t_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in S_A$ triangulaire supérieure stricte. D'après le « lemme très utile » vu en TD, la matrice diagonale ayant la même diagonale que T, autrement dit la matrice nulle, est dans $\overline{S_T} = \overline{S_A}$, comme voulu.

(c) Le sens direct est clair car si A est scalaire, $S_A = \{A\}$. Réciproquement, supposons $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non scalaire, et montrons qu'elle possède une matrice semblable non diagonale. On raisonne pour cela par contraposée en terme d'endomorphismes :

supposons que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ possède une matrice diagonale dans toute base de $\mathbb{C}^n$. On considère alors une première base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on a alors $\mathscr{B}_{i,j} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)$ qui est encore une base de E dans laquelle la matrice de u doit encore être diagonale, de la forme $\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Cela signifie en particulier que

$$u(e_i + e_j) = \mu_i(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$$

ce qui impose, comme (e_i, e_j) est libre, que $\lambda_i = \lambda_j = \mu_i$ et donc que tous les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soient égaux. Finalement, u est une homothétie.

Si A n'est pas scalaire, il existe donc une matrice non diagonale $M \in S_A$, ayant par exemple un coefficient $m_{i,j}$ non nul en position $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec par exemple $j > i$. En considérant $M_p = D_p M D_p^{-1}$ avec la même matrice $D_p = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^n}\right)$ que dans le « lemme très utile », on a toujours $M_p \in S_A$ et le coefficient de position (i,j) de M_p est $p^{j-i} m_{i,j}$ donc diverge vers l'infini quand p tend vers l'infini. Le cas $i < j$ se traite de même avec $M_p = D_p^{-1} M D_p$. $(M_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas bornée, et S_A non plus. Par contraposée, si S_A est bornée, alors A est scalaire.

(d) Comme vu en TD, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. S_A est alors l'image du connexe par arcs $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par l'application continue

$$P \mapsto PAP^{-1}$$

et est donc également connexe par arcs (rappelons que $P \mapsto P^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, par exemple en utilisant la formule des cofacteurs qui montre que les coefficients de P^{-1} sont des fractions rationnelles en les coeffcients de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.20. (a) Soit V un ouvert de E : le but est de montrer que $V \cap \Omega \neq \emptyset$.

$*$ $V \cap U_0 \neq \emptyset$ par densité de U_0, et est ouvert : il existe $x_0 \in V \cap U_0$ et $r_0 \in]0,1[$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset V \cap U_0$.

$*$ De même, $B(x_0, r_0) \cap U_1 \neq \emptyset$, et il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_1$ et $r_1 \in]0, 2^{-1}[$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_1$, et donc $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap V \cap U_0 \cap U_1$.

$*$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construits $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ et $(r_0, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $0 < r_k < 2^{-k}$;

(ii) pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\overline{B}(x_k, r_k) \subset B(x_{k-1}, r_{k-1}) \cap V \cap \bigcap_{\ell=0}^{n} U_\ell$.

On obtient de même que ci-dessus (x_{n+1}, r_{n+1}) vérifiant $0 < r_{n+1} < 2^{-n-1}$ et $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap V \cap \bigcap_{k=0}^{n+1} U_k$.

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p < q$, on a alors $x_q \in \overline{B}(x_p, r_p)$ et donc $\|x_p - x_q\| \leqslant r_p < 2^{-p}$, ce qui montre ausstôt que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente. En notant x sa limite, on a de plus, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n) \subset V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = V \cap \Omega$ et donc Ω est bien dense dans E.

(b) Il suffit de passer au complémentaire et d'appliquer la question précédente.

(c) Pour toute norme sur $\mathbb{R}[X]$, chaque $\mathbb{R}_n[X]$ est un fermé d'intérieur vide en tant que sous-espace de dimension finie. Si $\mathbb{R}[X]$ était complet pour une norme, on aurait $\mathbb{R}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ d'intérieur vide dans lui-même : absurde.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Parties compactes

E-9.21. Par compacité de la boule unité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \overline{B}(0_E, 1)$ tel que

$$|\!|\!| v_n - v |\!|\!| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|(v_n - v)(x)\| = \|(v_n - v)(x_n)\|.$$

En décomposant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} e_k$$

on a

$$|\!|\!| v_n - v |\!|\!| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}| \, \|v_n(e_k) - v(e_k)\| \leqslant \|x_n\| \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \|v_n(e_k) - v(e_k)\| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \|v_n(e_k) - v(e_k)\|$$

qui tend vers 0. Toutes les normes sur $\mathscr{L}(E)$ sont équivalentes, on conclut pour n'importe quelle norme.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.22. (a) Montrons que d est bien définie et est une distance sur l'ensemble des compacts de E. La symétrie est triviale. Inégalité triangulaire : soit (A,B,C) trois compacts de E. Pour tout $(x,y) \in A \times C$, $\mathrm{d}(x,C) \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,B) + \mathrm{d}(y,B)$, donc $\mathrm{d}(x,C) \leqslant \delta(A,B) + \mathrm{d}(C,B)$, donc $\delta(A,C) \leqslant \delta(A,B) + \delta(C,B) \leqslant \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C)$. On montre de même $\delta(C,A) \leqslant \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C)$, ce qui donne bien $\mathrm{d}(A,C) \leqslant \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C)$. Séparation : si $\mathrm{d}(A,B) = 0$, alors pour tout $x \in A$, $\mathrm{d}(x,B) = 0$, donc $x \in \overline{B} = B$, et réciproquement.

(b) La séparation n'est pas vérifiée avec des parties non fermées, et le sup définissant δ n'est pas défini pour une partie non compacte.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.23. Supposons (i), et soit $A>0$. Alors $K=f^{-1}(\overline{B}(0,A))$ est un compact de E, en particulier, est borné : il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in E$, $\|x\|\geqslant M\Rightarrow x\notin K$, c'est-à-dire que $\|x\|\geqslant M\Rightarrow \|f(x)\|\geqslant A$, et donc $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)\|=+\infty$.

Supposons le contraire de (i) : il existe un compact K de F tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas borné. Il existe alors $u\in f^{-1}(K)^{\mathbb{N}}$ qui diverge en norme vers $+\infty$, tandis que son image reste bornée : on n'a donc pas $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)\|=+\infty$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.24. (i)⇒(ii) : supposons que K est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

∗ K est compact donc fermé et $K=K\cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

∗ K est compact donc borné, ce qui entraîne l'existence de a.

∗ $M\mapsto|\det M|$ est continue sur K donc atteint sa borne inférieure b : il existe $M\in K$ tel que $b=|\det M|$. Comme $K\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $b>0$.

(ii)⇒(i) : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc il suffit de montrer que K est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puisqu'il est borné (existence de a). Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$\lim_{p\to+\infty}\det(M_p)=\det(M)$$

par continuité du déterminant, d'où $|\det(M)|\geqslant b$ et donc $M\in \mathrm{GL}_n(R)$. Comme K est un fermé relatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a en fait $M\in K$ et K est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.25. (a) K est une intersection de compacts, donc de fermés de E, et est donc fermé. Comme $K\subset K_0$ et que K_0 est compact, K est un fermé relatif de K_0, donc un compact.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $x_n\in K_n$. Comme $K_n\subset K_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que K_0 est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite $a\in K_0$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a de plus $\varphi(p)\geqslant p$ et donc par décroissance de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{\varphi(n)}\in K_p$ pour tout $n\geqslant p$. Comme K_p est en particulier fermé, ceci impose $a\in K_p$, et donc $a\in\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}K_p=K$. K est donc en particulier non vide.

(b) Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in K_n\setminus U$. Par un raisonnement analogue, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite a, et $a\in K\subset U$. Comme U est ouvert, c'est un voisinage de a et il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $x_{\varphi(n)}\in U$, en contradiction avec la définition de la suite x. On a bien prouvé par l'absurde qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $K_n\subset U$, et donc tous les suivants aussi par décroissance.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.26. On munit E d'une norme $\|.\|$ quelconque et $\mathscr{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||.|||$ associée (voir cours).

∗ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $u\in\mathscr{L}(E)$. Alors pour tout $x\in K$

$$\|u_n(x)-u(x)\|=\|(u_n-u)(x)\|\leqslant |||u_n-u|||\,\|x\|\to 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=u(x)$. Comme $u_n(x)\in K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que K est fermé car compact, $u(x)\in K$ et donc $u\in M$. M est donc fermé.

∗ Soit $u\in M$. Comme $\overset{\circ}{K}\neq\emptyset$, il existe $\overline{B}(a,r)$ une boule fermée incluse dans K, avec $a\in K$ et $r>0$. Pour tout $x\in\overline{B}(0,1)$, $a+rx\in K$ et donc $u(a+rx)\in K$. K étant borné, il existe $A>0$ tel que $\|y\|\leqslant A$ pour tout $y\in K$, et il vient

$$\|u(a+rx)\|\leqslant A\Rightarrow \|u(x)\|\leqslant\frac{1}{r}(A+\|u(a)\|)$$

et donc $|||u|||\leqslant\frac{1}{r}(A+\|u(a)\|)$. On en déduit que M est borné et donc compact comme fermé borné de $\mathscr{L}(E)$ qui est de dimension finie.

Énoncé non détaillé – Énoncé détaillé

E-9.27. (a) Seul le deuxième point n'est pas directement dans le cours, et il est clair que $B\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset K$.

(b) On munit tout d'abord E d'une norme $\|.\|$ quelconque, et on définit $E_x=\{\lambda>0,\lambda^{-1}x\in K\}\subset\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x\in E$ et $N:x\mapsto\inf E_x$.

∗ N est bien définie : en effet, il existe $r>0$ tel que $B(0,r)\subset K$, et pour tout $x\in E$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1}x=0$$

si bien qu'il existe $A>0$ tel que $\lambda\geqslant A\Rightarrow\|\lambda^{-1}x\|<r$ donc $\lambda\in E_x$, qui est donc non vide.

∗ Soit $x\in E$, supposons $N(x)=0$ et $x\neq0$. Il existe alors $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_x^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. On en déduit que $\lambda_n^{-1}x\in K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\lambda_n^{-1}x\|=+\infty$, ce qui contredit le fait que K est borné. On a prouvé par l'absurde que $N(x)=0\Rightarrow x=0$.

$*$ Pour tout $x \in E$, on a $E_{\lambda x} = \lambda E_x$ pour tout $\lambda > 0$ puis $E_{\lambda x} = |\lambda| E_x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec (iv), ce qui donne bien $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ par homogénéité de l'inf.

$*$ Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $\lambda \in E_x$ et $\lambda' \in E_y$, on a $\lambda^{-1} x \in K$ et $\lambda'^{-1} y \in K$. Par convexité de K

$$\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}\lambda^{-1}x + \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}\lambda'^{-1}y = \frac{x+y}{\lambda+\lambda'} \in K$$

si bien que $\lambda + \lambda' \in E_{x+y}$. On a donc $N(x+y) \leqslant \lambda + \lambda'$. Il vient $N(x+y) - \lambda' \leqslant \lambda$ et donc $N(x+y) - \lambda' \leqslant N(x)$ par passage à l'inf sur E_x à droite, puis $N(x+y) - N(x) \leqslant \lambda'$ et donc $N(x+y) - N(x) \leqslant N(y)$ de même, et donc enfin l'inégalité triangulaire $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

$*$ On a aussitôt $x \in K \Rightarrow 1 \in E_x$ et donc $N(x) \leqslant 1$, si bien que $K \subset \overline{B}(0,1)$ par définition de N.

Réciproquement, soit $x \in E \setminus \{0\}$. Si $\lambda \in E_x$, alors tout $\mu > \lambda$ est encore dans E_x puisque $\mu^{-1} x$ est dans le segment $[0, \lambda^{-1} x] \subset K$ par convexité. On sait donc que $E_x =]N(x), +\infty[$ ou $[N(x), +\infty[$. Or, $\varphi_x : \lambda \mapsto \lambda^{-1} x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $E_x = \varphi_x^{-1}(K)$ est donc un fermé relatif de $\mathbb{R}_+^*$. Comme en outre $N(x) > 0$, il vient $E_x = [N(x), +\infty[$. Si $N(x) \leqslant 1$, on a donc $1 \in E_x$ et donc $x \in K$, de sorte que K est bien la boule unité fermée de N.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.28. On exclut le cas $K = \emptyset$ qui est trivial. Soit $x \in K$ et soit D une droite affine quelconque passant par x, dont on note $u \neq 0$ un vecteur directeur unitaire. $D \cap K$ est compact, comme intersection d'un compact avec un fermé, et convexe comme intersection de deux convexes : c'est donc un segment $[a, b]$. Si l'on avait $a \notin \mathrm{Fr}(K)$, alors on aurait $a \in \overset{\circ}{K}$, puisque $\mathrm{Fr}(K) = \overline{K} \setminus \overset{\circ}{K} = K \setminus \overset{\circ}{K}$. Dans ce cas, il existerait $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$, mais alors $a + \frac{r}{2} u$ et $a - \frac{r}{2} u$ seraient tous deux dans $D \cap K$ et l'un des deux serait hors de $[a, b]$, ce qui est contradictoire avec la définition de $[a, b]$. On a donc $a \in \mathrm{Fr}(K)$, et $b \in \mathrm{Fr}(K)$ de même, et x est barycentre positif de a et b donc dans l'enveloppe convexe de $\mathrm{Fr}(K)$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.29. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K. On a la disjonction de cas suivante.

$*$ Soit il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que x soit à valeurs dans $\{u_n, 0 \leqslant n \leqslant n_0\} \cup \{a\}$. Alors x prend un nombre fini de valeurs. Comme $\mathbb{N}$ est infini, soit il existe $N \in [\![0, n_0]\!]$ tel que x prenne une infinité de fois la valeur u_N, soit x prend une infinité de fois la valeur a. L'ensemble de tous ces termes constitue une suite extraite de x constante donc convergente, ce qui montre que x a une valeur d'adhérence dans K.

$*$ Soit x prend dans $K^* = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs correspondant à une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$.

On choisit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in K^*$: il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = u_{N_0}$. Par notre hypothèse sur x, il existe $n_1 > n_0$ tel que $x_{n_1} = u_{N_1} \in K^*$ avec $N_1 > N_0$.

On construit ainsi par récurrence deux extractions $\varphi(k) = n_k$ et $\psi(k) = N_k$, $k \in \mathbb{N}$, qui vérifient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$x_{\varphi(k)} = u_{\psi(k)}.$$

La suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est donc extraite de x, mais aussi extraite de u, et converge donc vers a. x a donc bien une valeur d'adhérence dans K ce qui clôt la preuve.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.30. $*$ Si $\sigma(K)$ n'était pas borné, il existerait $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma(K)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors $M_n \in K$ et $X_n \in \mathbb{C}^d$ non nul tels que

$$M_n X_n = u_n X_n.$$

Mais alors, pour toute norme $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$

$$|||M_n||| \geqslant \frac{\|M_n X_n\|}{\|X_n\|} \geqslant |u_n|$$

ce qui contredit le caractère borné de K.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma(K)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in K$ et $X_n \in \mathbb{C}^d$ de norme 1 (on peut normer un vecteur propre puisqu'il est non nul) tels que

$$M_n X_n = u_n X_n.$$

$K \times S(0,1)$ étant compact dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d$, on peut extraire du couple (M_n, X_n) une sous-suite $(M_{\varphi(n)}, X_{\varphi(n)})$ convergente dans $K \times S(0,1)$, vers (M, X). Par passage à la limite

$$MX = \ell X$$

et comme $M \in K$ et $X \neq 0$, $\ell \in \sigma(K)$, qui est fermé, et donc compact.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.31. (a) F étant de dimension finie est fermé, ce résultat a été vu en TD (distance à un fermé non vide atteinte en dimension finie).

(b) Soient $y \notin F$ et $\delta = \mathrm{d}(y, F)$. $\delta > 0$ car F est fermé par la question précédente. On pose alors $x = \frac{y - p(y)}{\delta}$. De façon directe, $\|x\| = \frac{1}{\delta}\|y - p(y)\| = 1$. De plus, pour tout $z \in F$

$$\|x - z\| = \frac{1}{\delta}\|y - p(y) - \delta z\| \geqslant \frac{1}{\delta}\mathrm{d}(y, F) = 1$$

puisque $p(y)+\delta z \in F$. Il en découle bien $\mathrm{d}(x,F)\geqslant 1$, comme voulu.

(c) Soit $x_0\in E$ de norme 1. D'après la question précédente, il existe $x_1\in E$ tel que $\|x_1\|=1$ et $\mathrm{d}(x_1,\mathrm{Vect}(x_0))\geqslant 1$. Si $(x_0,\dots,x_n)$ sont construits pour $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $\|x_k\|=1$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et $\mathrm{d}(x_k,\mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_{k-1}))\geqslant 1$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe $x_{n+1}\in E$ tel que $\|x_{n+1}\|=1$ et $\mathrm{d}(x_{n+1},\mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_n))\geqslant 1$ avec la question précédente, ce qui permet de construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ distincts, par exemple $p>q$, alors $\mathrm{d}(x_p,\mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_{p-1}))\geqslant 1$, et en particulier $\|x_p-x_q\|\geqslant 1$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédait une valeur d'adhérence a associée à l'extractrice φ, on aurait en particulier $\|x_{\varphi(n+1)}-x_{\varphi(n)}\|\geqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et donc $0\geqslant 1$ par passage à la limite, ce qui est absurde. Ainsi, $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte (elle contient une suite sans valeur d'adhérence). Ceci achève la démonstration du théorème de Riesz.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.32. (a) On note δ_n le diamètre de F_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n\in F_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, si $p\geqslant q$, alors $(x_p,x_q)\in F_q$ de sorte que $\|x_p-x_q\|\leqslant\delta_q$.

Comme en particulier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact F_0, elle possède au moins une valeur d'adhérence : considérons a et a' deux valeurs d'adhérence de cette suite, associées aux extractrices φ et ψ. On a alors $\|x_{\varphi(p)}-x_{\psi(q)}\|\leqslant\delta_{\psi(q)}$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(p)\geqslant\psi(q)$. Il vient $\|a-x_{\psi(q)}\|\leqslant\delta_{\psi(q)}$ pour tout $q\in\mathbb{N}$ en faisant tendre p vers l'infini, puis $\|a-a'\|\leqslant 0$ en faisant cette fois tendre q vers l'infini. x possède donc une unique valeur d'adhérence, et est ainsi convergente.

On note ℓ sa limite. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(x_n)_{n\geqslant k}$ étant une suite du compact F_k, on a $\ell\in F_k$, et finalement ℓ est dans l'intersection F de tous les $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est ainsi non vide. Pour tout $m\in F$, on a en particulier $(m,\ell)\in F_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $\|m-\ell\|\leqslant\delta_n$, puis $m=\ell$ en faisant tendre n vers l'infini, et F est bien un singleton.

(b) Supposons qu'on le puisse, et soit $C_0=C(a_0,r_0)$ un cercle de cette famille. L'unique cercle passant par a_0 a nécessairement un rayon $<\dfrac{r_0}{2}$ sinon il couperait C_0 : on le nomme C_1 et a_1 son centre. On réitère ce raisonnement pour construire une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cercles de rayon $r_n<2^{-n}r_0$. En considérant les disques délimités par ces cercles, la suite (a_n) des centres converge vers un point (question précédente) qui ne peut être recouvert par un cercle de rayon >0 car celui-ci devrait alors couper un des cercles de la suite.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.33. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, $\mathbb{U}_p$ l'ensemble des racines p-èmes de l'unité pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, et $\mathbb{U}_\infty=\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_p$.

$*$ $\mathbb{U}_\infty$ est l'image de $\mathbb{Q}$ par $x\mapsto\exp 2i\pi x$, d'où l'on tire immédiatement qu'il est dense dans $\mathbb{U}$.

$*$ Il vient alors que si $D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale à diagonale dans $\mathbb{U}$, elle est limite d'une suite de matrices diagonales à diagonale dans $\mathbb{U}_\infty$.

$*$ Les éléments de A sont des matrices diagonalisables et à valeurs propres dans $\mathbb{U}_\infty$, car annulées par un polynôme de la forme X^p-1 avec $p\in\mathbb{N}^*$, simplement scindé et dont les racines sont les éléments de $\mathbb{U}_p\subset\mathbb{U}_\infty$. En notant B l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres $\mathbb{U}$, on a donc $\overline{A}\subset\overline{B}$, puis $\overline{A}=\overline{B}$ par densité de $\mathbb{U}_\infty$ dans $\mathbb{U}$.

$*$ Par un argument similaire à celui développé en TD, on montre que B est dense dans l'ensemble C des matrices dont le spectre est inclus dans $\mathbb{U}$, de sorte que $\overline{B}=\overline{C}$.

$*$ On montre enfin que C est fermé : soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}\in C^{\mathbb{N}}$ une suite de matrices qui converge vers $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes caractéristiques de ces matrices. L'application qui associe à une matrice son polynôme caractéristique est continue (les coefficients du polynôme caractéristique sont polynomiaux en ceux de la matrice), de sorte que le polynôme caractéristique χ de M est la limite des χ_k quand k tend vers l'infini. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $(a_{k,1},\dots,a_{k,n})\in\mathbb{U}^n$ tel que

$$\chi_k=\prod_{\ell=1}^{n}(X-a_{k,\ell}).$$

Comme $\mathbb{U}^n$ est compact, il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $b_\ell=\lim_{k\to+\infty}a_{\varphi(k),\ell}$ existe dans $\mathbb{U}$ pour tout $\ell\in[\![1,n]\!]$. On en déduit que

$$\chi=\lim_{k\to+\infty}\chi_{\varphi(k)}=\prod_{\ell=1}^{n}(X-b_k)$$

est à racines dans $\mathbb{U}$ et donc que $M\in C$.

Finalement, $\overline{A}=C$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.34. (a) K étant compact, il existe une extraction $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Avec la propriété de f, on a par une récurrence immédiate pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\leqslant\varphi(n)$

$$\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\|\geqslant\|u_{\varphi(n+1)-k}-u_{\varphi(n)-k}\|$$

et finalement

$$\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\|\geqslant\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}-u_0\|=\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}-x\|$$

en prenant $k=\varphi(n)$. Comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\lim_{n\to+\infty}\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\|=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}=x$.

(b) Soit $(x,y)\in K^2$. On considère alors u et v définies par $u_0=x$, $v_0=y$, et $u_{n+1}=f(u_n)$, $v_{n+1}=f(v_n)$. Il existe une extractrice φ telle que (u,v) converge dans le compct K^2, de sorte qu'avec ce qui précède, $(u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(v_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

vers y. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) \geqslant 1$$

et donc par une récurrence facile pour tout $k \in [\![0, \varphi(n+1) - \varphi(n)]\!]$

$$\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - v_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\| \geqslant \|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)-k} - v_{\varphi(n+1)-\varphi(n)-k}\|$$

et en particulier

$$\|u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - v_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\| \geqslant \|f(x) - f(y)\|$$

d'où $\|x-y\| \geqslant \|f(x)-f(y)\|$ par passage à la limite, et donc $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\|$

(c) f est alors continue (elle est lipschitzienne) et injective ($f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ pour tout $(x,y) \in K^2$). Il reste à montrer que f est surjective : pour tout $x \in K$, en utilisant de nouveau la suite u et l'extraction φ des questions précédentes, la suite $v \in K^{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1}$ possède une suite extraite convergente vers $\ell \in K$, ce qui donne $f(\ell) = x$ par passage à la limite. f^{-1} étant encore une isométrie est également continue, et f est bien une bijection bicontinue.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.35. (a) On suppose A infini (la situation contraire est évidente) et on note $I(B) = \bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha$ pour toute partie B de A.

* S'il existe deux parties finies B et C de A telles que $G = I(B) \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$ et $H = I(C) \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \emptyset$, alors $G \subset \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $H \subset \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et donc $I(B \cup C) = \emptyset$ ce qui est contraire à notre hypothèse initiale puisque $B \cup C$ est fini. On peut donc choisir $K_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ou $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que $I(B) \cap K_1 \neq \emptyset$ pour toute partie finie B de A.

En notant $K_1 = [a_1, b_1]$, on peut alors choisir de même $K_2 = [a_2, b_2]$ parmi $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ et $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ vérifiant $I(B) \cap K_2$ pour toute partie finie B de A, et poursuivre ainsi par récurrence la construction de $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$, suite décroissante de segments de $[0,1]$ de longueur $\frac{1}{2^n}$ rencontrant $I(B)$ pour toute partie finie B de A. Les suites a et b sont adjacentes et possèdent donc une limite commune x. Montrons que $x \in I(A)$: en effet, pour tout $\alpha \in A$, $\{\alpha\}$ étant une partie finie de A, on a $[a_n, b_n] \cap F_\alpha \neq \emptyset$: il existe alors $u_n \in [a_n, b_n] \cap F_\alpha$. L'encadrement $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ entraîne alors que u converge vers x. D'autre part, $u \in F_\alpha^{\mathbb{N}}$ et F_α est fermé, si bien que $x = \lim_{n \to +\infty} u_n \in F_\alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in A$, on a bien $x \in I(A)$ et donc $I(A) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.

(b) La famille $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ définie par $F_\alpha = {\Omega_\alpha}^{\mathrm{c}}$ pour tout $\alpha \in A$ vérifie les hypothèses de la question précédente par complémentation, ce qui permet de conclure.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_n) \in I^n$ n applications deux à deux distinctes, formant une partie finie de I. Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $f_i(x) \neq 0$. En prenant $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ de même signe que $f_i(x)$, l'application

$$g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i$$

est élément de I car I est un sous-groupe additif de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Elle est par ailleurs à valeurs strictement positives sur $[0,1]$, de sorte que $\frac{1}{g} \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, et donc

$$1 = \frac{1}{g} g \in I$$

par propriété d'idéal, et finalement, pour tout $h \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$

$$h = 1h \in I$$

ce qui contredit le fait que I est un idéal strict. Il existe donc, pour toute partie finie B de I, un zéro commun à tous les éléments de B.

Pour tout $f \in I$

$$Z_f = f^{-1}(\{0\})$$

est un fermé de $[0,1]$ comme image réciproque d'un fermé par l'application continue f. Nous venons de montrer que

$$\bigcap_{f \in B} Z_f \neq \emptyset.$$

pour toute partie finie B de I, de sorte que

$$\bigcap_{f \in I} Z_f \neq \emptyset$$

d'après la question (a), c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = 0$ pour tout $f \in I$, comme voulu.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.36. (a) On raisonne par contraposée : si $\varepsilon > 0$ est tel que A ne soit recouvert par aucune famille finie de boules de rayon ε, on peut considérer une telle boule B_0 de rayon ε et son centre u_0, puis $u_1 \notin B_0$ et $B_1 = B(u_1, \varepsilon)$, puis $u_2 \notin B_1$, *etc.*, et constater que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construits sont à distance deux à deux supérieure à ε et donc n'est pas de Cauchy (voir la démonstration du lemme de précompacité dans la feuille de TD, qui formalise tout cela).

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. A est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon = 1 = 2^{-0}$: l'une d'entre elles, de centre a_0, contient une infinité de termes de la suite u, ce qui permet de définir une extractrice φ_0 telle que $(u_{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de $B(a_0,1)$. Supposons, pour $k\in\mathbb{N}$ fixé, des points $(a_0,\dots,a_k)\in E^k$ et des extractrices $(\varphi_0,\dots,\varphi_k)$ construits tels que $(u_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_\ell(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de $B(a_\ell,2^{-\ell})$ pour tout $\ell\in[\![0,k]\!]$. On peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon 2^{-k-1}, et l'une d'entre elles, de centre a_{k+1}, contient une infinité de termes de la suite $(u_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui permet de nouveau de définir une extractrice φ_{k+1} telle que $(u_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{k+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de $B(a_{k+1},2^{-k-1})$. On a ainsi construit une suite d'extractrices $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\|u_{\varphi_k(n)}-u_{\varphi_k(p)}\|\leqslant 2^{-k}$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ et tout $k\in\mathbb{N}$.

On effectue alors un *procédé diagonal* (voir TD) : on pose $\psi : n\mapsto \varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)$. Il s'agit d'une nouvelle extractrice, vérifiant $\|u_{\psi(p)}-u_{\psi(q)}\|\leqslant 2^{-p}$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p<q$, ce qui prouve que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(c) Immédiat avec ce qui précède.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.37. Notons que $\overline{B}(a,1)$ est compact puisque E est de dimension finie. Construisons par récurrence une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)}\notin B(a,1)$ (ce que le caracatère non borné de φ rend possible) mais $u_{\varphi(n)-1}\in\overline{B}(a,1)$. Il est plus simple de formaliser cela en contruisant en fait deux extractions.

∗ Comme a est valeur d'adhérence de u, il existe $\varphi(0)\in\mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(0)}\in\overline{B}(a,1)$. On pose $\psi(0)=\min\{p>\varphi(0), u_p\notin B(a,1)\}$, qui existe nécessairement puisque u n'est pas bornée, donc ne reste pas incluse dans $B(a,1)$. Notons que $u_{\psi(0)-1}\in B(a,1)$.

∗ Pour $n\in\mathbb{N}$, supposons construits $\varphi(0)<\psi(0)<\dots<\varphi(n)<\psi(n)$ tels que $u_{\varphi(k)}\in\overline{B}(a,1)$, $u_{\psi(k)-1}\in\overline{B}(a,1)$ et $u_{\psi(n)}\notin B(a,1)$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Comme a est valeur d'adhérence de u il existe $\varphi(n+1)>\psi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)}\in\overline{B}(a,1)$. On pose alors $\psi(n+1)=\min\{p>\varphi(n), u_p\notin B(a,1)\}$, de sorte que $u_{\psi(n+1)}\notin B(a,1)$ mais $u_{\psi(n)-1}\in\overline{B}(a,1)$.

On construit ainsi par récurrence φ et ψ, deux extractrices. La suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $A=f(\overline{B}(a,1))\setminus B(a,1)$ par construction.

Or, $K=f(\overline{B}(a,1))\setminus B(a,1)=f(\overline{B}(a,1))\cap B(a,1)^{\mathrm{c}}$ est compact comme intersection de l'image continue d'un compact avec un fermé. Si u n'est pas bornée, elle possède donc une suite extraite à valeurs dans K, qui possède donc elle-même une valeur d'adhérence b différente de a puisque $b\notin B(a,1)$ par fermeture de $B(a,1)^{\mathrm{c}}$, ce qui est contradictoire. u est donc bornée, et n'ayant qu'une valeur d'adhérence, elle est convergente puisque E est de dimension finie.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

Parties connexes par arcs, théorème des valeurs intermédiaires

E-9.38. Non : son image serait un intervalle $[a,b]\subset[0,1]$. Enlever de $[0,1]^2$ l'antécédant du mileu de cet intervalle : la connexité par arcs n'est pas conservée.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.39. On vérifie immédiatement que Δ est convexe, donc connexe par arcs. $\varphi:(x,y)\mapsto f(x)-f(y)$ est continue sur Δ et n'atteint pas 0 car f est injective, donc reste de signe constant strict, ce qui est équivalent à la stricte monotonie de f.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.40. La réponse est non en général, comme le prouve le contre-exemple suivant : dans $\mathbb{R}^2$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$C_n=\mathbb{R}\times\{0\}\cup\mathbb{R}\times\{1\}\cup([n,+\infty[\times[0,1])$$

(faire un dessin!). C_n est clairement connexe par arcs, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n=\mathbb{R}\times\{0\}\cup\mathbb{R}\times\{1\}$ n'est pas connexe par arcs.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.41. Supposons que l'ensemble $\mathcal{Z}$ des zéros de f soit compact : il est alors borné, et il existe une boule fermée B telle que $\mathcal{Z}\subset B$. $A=\mathbb{R}^n\setminus B$ est connexe par arcs puisque $n\geqslant 2$, si bien que $f(A)$ est une partie connexe par arcs, donc un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Supposons par exemple que $f(A)\subset]0,+\infty[$. B étant une boule fermée est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc f y atteint un minimum $m\leqslant 0$ (puisque f s'annule sur $\mathcal{Z}\subset B$), de sorte que

$$f(\mathbb{R}^n)=f(A)\cup f(B)\subset[m,+\infty[\neq\mathbb{R}$$

en contradiction avec la surjectivité de f.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.42. (a) Pour $(x,y)\in A^2$ reliés par $\gamma:[0,1]\to A$, $f\circ\gamma:[0,1]\to\{0,1\}$ est continue donc constante par le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Soient $A=A_1\cup\{(0,y), y\in[-1,1]\}$, et $f:A\to\{0,1\}$ continue.

∗ A_1 est l'image de $]0,1]$ par l'application continue $\varphi: x\mapsto\left(x,\sin\dfrac{1}{x}\right)$ et est donc connexe par arcs (graphe d'une fonction continue, voir le cours). f donc est constante sur A_1 par ce qui précède.

$*$ Pour tout $t \in [-1,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}(t) + 2\pi n}, t\right) \in A_1$. u est une suite d'éléments de A_1 qui converge vers $(0,t)$ (ce qui montre au passage que $A \subset \overline{A_1}$). Son image par f est constante égale à 0 ou 1 si bien que $f(0,t)$ prend la même valeur par continuité de f, et f est donc en fait constante sur A, et A est connexe.

$*$ Soit $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) \in A_1$ quelconque. Pour n assez grand, $\left(\dfrac{2}{(4n+1)\pi}, 1\right) \in \operatorname{Im}\gamma$: on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'antécédants. Elle a une sous-suite convergente, qui tend nécessairement vers 0, mais $\gamma(x_n)$ ne tend pas vers $(0,0)$. A n'est donc pas conexe par arcs.

Il reste à démontrer que $A = \overline{A_1}$. Le raisonnement fait ci-dessus permet d'affirmer que $A_1 \subset A \subset \overline{A_1}$: il suffit donc de démontrer que A est fermé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge vers $\ell = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $u_n = (x_n, y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$*$ Supposons que l'abscissse a de ℓ est strictement positive. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ implique que l'abscisse x_n de u_n est strictement positive. On en déduit que $u_n \in A_1$, et donc que $u_n = \left(x_n, \sin\dfrac{1}{x_n}\right)$. Comme u converge vers ℓ, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et donc $b = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\dfrac{1}{x_n} = \sin\dfrac{1}{a}$ par continuité de $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ en a. Il vient $\ell \in A_1 \subset A$.

$*$ Supposons que $a = 0$. Comme $y_n \in [-1,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $b \in [-1,1]$ et donc $\ell = (0,b) \in A$.

Dans tous les cas, $\ell \in A$, A est donc fermé, et est ainsi l'adhérence de A_1.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**

E-9.43. (a) La réponse est non : soit f définie par $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f n'est pas continue en 0 car, par exemple

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \neq f(0).$$

Cependant, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

$*$ Si $0 \notin [a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$ et $f([a,b])$ est donc un segment.

$*$ Si $a = b = 0$, $f([a,b]) = \{0\}$ est un segment.

$*$ $[a,b]$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et que $0 \in [a,b]$, on envisage les cas où $a = 0$, $b = 0$ et $a < 0 < b$. Considérons le premier d'entre eux : on a alors $b > 0$, et on considère alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < b$. Alors $\left[\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}, \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right] \subset [a,b]$ et donc

$$f\left(\left[\frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right]\right) = [-1,1] \subset f([a,b]).$$

La réciproque étant triviale, $f([a,b]) = [-1,1]$ est encore un segment. On raisonne de même, de façon immédiate, dans les autres cas.

f ainsi définie vérifie la propriété voulue sans être continue.

(b) La réponse est oui. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f([x-2^{-n}, x+2^{-n}])$ est un intervalle fermé I_n contenant $y = f(x)$. Les $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite d'intervalles, donc de parties connexes par arcs, ayant un point commun y, donc leur intersection est encore un intervalle I, qui contient toujours y, et qui est fermé comme intersection de fermés.

Montrons que $I = \{y\}$. En effet, s'il existait $z \in I \setminus \{y\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait $u_n \in [x - 2^{-n}, x + 2^{-n}]$ tel que $f(u_n) = z$. Mais alors on aurait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f^{-1}(\{z\})$ tandis que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x \notin f^{-1}(\{z\})$$

puisque $f(x) = y \neq z$. Ceci contredirait la fermeture de $f^{-1}(\{z\})$.

Finalement, $I = \{y\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors nécessairement $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{n_0} \subset [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$, puis $I_n \subset [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant n_0$ par décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en posant $\eta = 2^{-n_0}$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|x - t| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

et donc f continue en x. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Énoncé non détaillé – **Énoncé détaillé**