

Consideraciones físicas sobre el momento angular.

En los apartados anteriores hemos analizado el problema de autovalores del momento angular. Hemos visto que si medimos una componente del momento angular sólo podemos obtener valores que sean múltiplos enteros de \hbar . También hemos visto que no podemos medir dos componentes del momento angular simultáneamente. Por otro lado, si medimos el módulo del momento angular sólo podemos obtener los valores $l(l+1)\hbar^2$.

Como los operadores \hat{L}^2 y \hat{L}_z conmutan, hemos podido obtener una base de autovectores comunes a los dos operadores, que en la representación coordenadas son los armónicos esféricos. Sin embargo, estos dos operadores no forman un conjunto completo de observables que conmutan, de modo que los números l y m no son suficientes para etiquetar unívocamente los vectores de la base y, por tanto, necesitamos otro índice que notaremos por k . Vamos a considerar una base de vectores de la forma $|k, l, m\rangle$ de modo que:

$$\hat{L}^2 |k, l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |k, l, m\rangle \quad \text{y} \quad \hat{L}_z |k, l, m\rangle = m\hbar |k, l, m\rangle$$

Si tenemos una partícula en el estado $|k, l, m\rangle$, la partícula tiene un valor bien definido del módulo del momento angular y de la proyección del momento angular sobre el eje z . Si bien la partícula no tiene un valor bien definido de las componentes \hat{L}_x y \hat{L}_y , podemos calcular el valor medio de estos operadores. Por comodidad vamos a escribir estos operadores en función de \hat{L}_+ y \hat{L}_- :

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \quad \text{y} \quad \hat{L}_y = \frac{i}{2} (\hat{L}_- - \hat{L}_+)$$

Por tanto, si la partícula se encuentra en el estado $|k, l, m\rangle$, los valores medios de \hat{L}_x y \hat{L}_y valen:

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \langle k, l, m | \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-) | k, l, m \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \hat{L}_y \rangle = 0$$

Vamos a calcular ahora los valores medios de los operadores \hat{L}_x^2 y \hat{L}_y^2 para obtener así la dispersión en la medida de los observables \hat{L}_x y \hat{L}_y :

$$\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle k, l, m | (\hat{L}_+^2 + \hat{L}_-^2 + \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+) | k, l, m \rangle$$

Está claro que los operadores \hat{L}_+^2 y \hat{L}_-^2 no contribuyen al valor medio. Por otro lado, podemos escribir el operador $\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+$ en función de \hat{L}^2 y \hat{L}_z de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) + (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) = \\ &= 2\hat{L}_x^2 + 2\hat{L}_y^2 + 2\hat{L}_z^2 - 2\hat{L}_z^2 = 2(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2) \end{aligned}$$

de modo que el valor medio queda:

$$\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle k, l, m | (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2) | k, l, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$$

Del mismo modo se puede comprobar que:

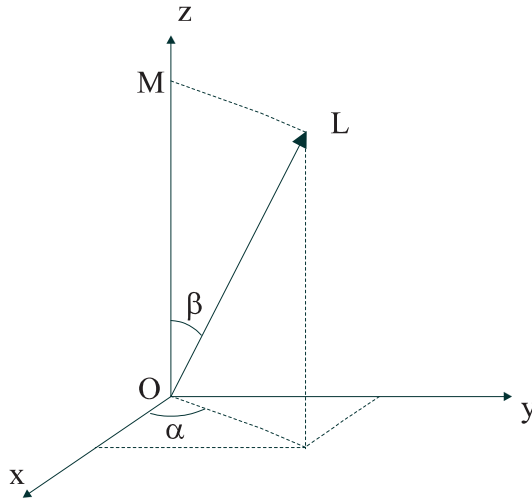
$$\langle \hat{L}_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$$

Por tanto, las dispersiones de los valores de \hat{L}_x y \hat{L}_y valen:

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} [l(l+1) - m^2]}$$

Vamos a ver cómo podemos interpretar este resultado. Vamos a considerar la imagen que se muestra en la figura: tenemos que si la partícula se encuentra en el estado $|k, l, m\rangle$ tiene bien definido el módulo del momento angular y la proyección del momento angular sobre el eje z . Por tanto, podemos imaginarnos que el momento angular forma un cono, es decir, que el ángulo α de la figura no tiene un valor definido (puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π con la misma probabilidad). Las distancias \overline{OL} y \overline{OM} valen:

$$\overline{OL} = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad \text{y} \quad \overline{OM} = \hbar m$$



Por otro lado, si el ángulo α tuviera un valor bien definido la proyección del momento angular sobre el eje x valdría:

$$L_x = \overline{OL} \sin \beta \cos \alpha$$

Podemos calcular el seno de β de la forma:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{l(l+1)}} = \sqrt{\frac{l(l+1) - m^2}{l(l+1)}} = \frac{\hbar \sqrt{l(l+1) - m^2}}{\overline{OL}}$$

de modo que

$$L_x = \hbar \sqrt{l(l+1) - m^2} \cos \alpha$$

Vamos a calcular el valor medio de L_x y L_x^2 a partir de esta expresión teniendo en cuenta que α toma valores arbitrarios entre 0 y 2π .

$$\langle L_x \rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m^2} \langle \cos \alpha \rangle = 0$$

$$\langle L_x^2 \rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m^2] \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$$

Por tanto, a partir de estos resultados vemos que el valor medio de L_x vale cero, mientras que su dispersión vale:

$$\Delta L_x = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} [l(l+1) - m^2]}$$

es decir, que se obtiene el mismo resultado que calculando el valor medio de los operadores. En consecuencia hemos podido interpretar el resultado del valor medio de la componente L_x y su cuadrado clásicamente, como si el momento angular (para una partícula en el estado $|k, l, m\rangle$) tuviera módulo y proyección sobre el eje z bien definido pero de forma que el ángulo α es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 2π . Hay que tener cuidado con esta imagen clásica, ya que podríamos pensar que si medimos la componente L_x podemos obtener cualquier valor, ya que el momento angular (con esta imagen) subtiende todo el cono. Sin embargo, sabemos que no es así, ya que si medimos el valor de L_x sólo podemos obtener valores que sea múltiplos enteros de \hbar .

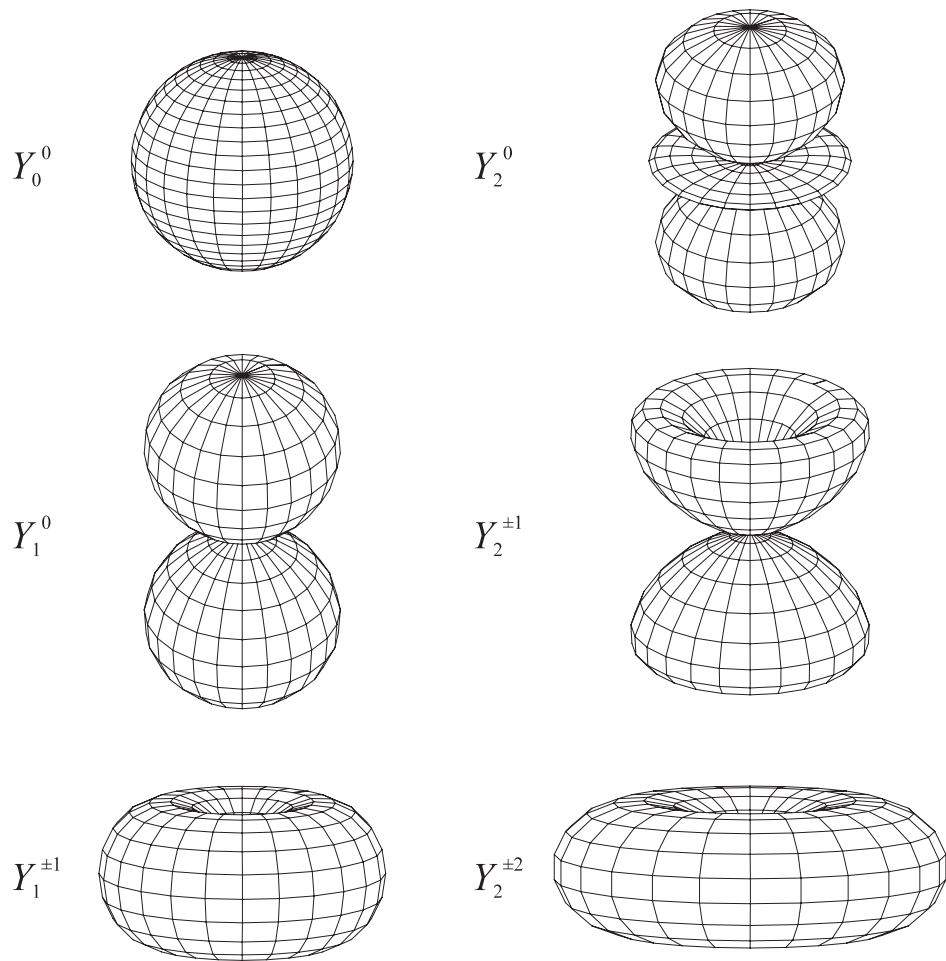
Para terminar, vamos a analizar la forma de los armónicos esféricos. Supongamos que una partícula tiene valores bien definidos del módulo del momento angular y de su proyección sobre el eje z . La función de onda de la partícula en la representación coordenadas será de la forma:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

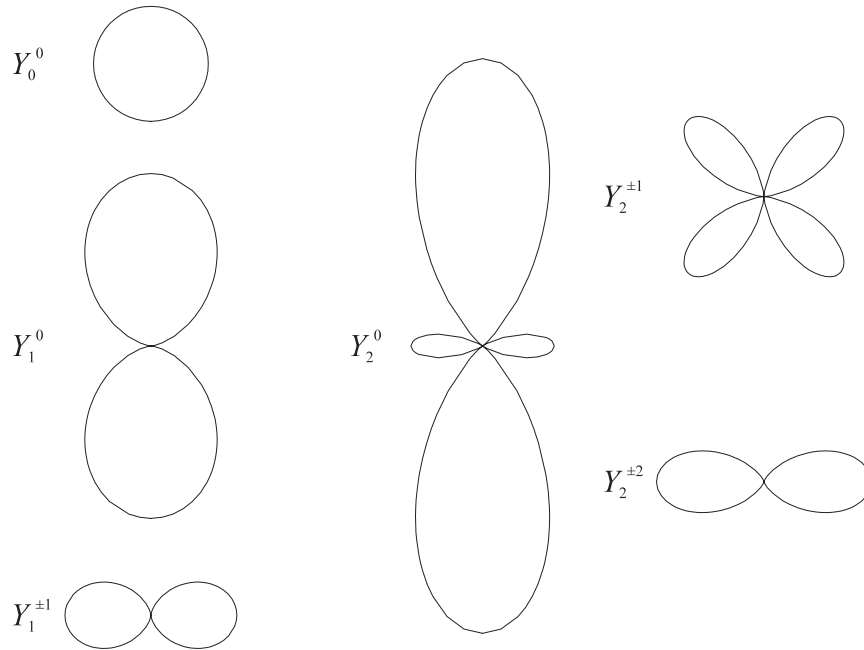
La densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en la posición \mathbf{r} vendrá dada por la expresión:

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = |f(r)|^2 |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2$$

Vamos a dibujar la parte angular de la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula, que viene dada por la función $|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2$. Para dibujar estas funciones vamos a utilizar la siguiente representación: para cada dirección dada por los ángulos θ y φ , dibujamos un punto que se encuentra a una distancia del origen igual a $|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2$, de modo que todos los puntos para todas las direcciones θ y φ describen una superficie. En el apartado anterior hemos visto las expresiones de los primeros armónicos esféricos, de modo que a partir de estas expresiones podemos representar gráficamente esas superficies, que son las que se muestran en la siguiente figura.



Una representación más útil es representar el corte de las superficies anteriores con el plano xz . En la siguiente figura se muestra este corte, con todas las figuras representadas en la misma escala.



Aunque es difícil hacerse una imagen del sentido físico de estas figuras, podemos interpretarlas en algunos casos. Para $l = 0$ y $m = 0$, la partícula no tiene momento angular, de modo que la distribución angular es uniforme, es decir, que la función de onda es simétrica respecto del origen y, por tanto, la superficie correspondiente a la función $Y_0^0(\theta, \varphi)$ es una esfera. Por otro lado, podemos ver que si fijamos el valor de l y para dicho valor tomamos $m = \pm l$, la componente L_z toma el máximo valor posible. Podemos ver en las figuras que la máxima probabilidad de encontrar a la partícula la tenemos en el plano xy . Este resultado es lógico, ya que si una partícula clásica tiene su momento angular en la dirección del eje z se moverá en el plano xy . Si disminuimos el valor de m , la trayectoria de la partícula se va alejando del plano xy .

Por último, podemos ver la dependencia de los armónicos esféricos con el número m para un valor fijo de l más elevado. En la siguiente figura se puede ver el corte de los armónicos esféricos con el plano xz para $l = 5$ y distintos valores de m . Como se puede ver, para valores bajos de m la distribución de probabilidad angular está cercana al eje z . Cuando m va aumentando la distribución angular se va alejando del eje z y acercándose al plano xy .

